

Opdrachtgever:  
Deltares

## **Betrouwbaarheidsintervallen voor kwantielen van de overschrijdingsfrequentie**

**Toepassing op kuststations en IJsselmeergebied**

Auteurs: Chris Geerse  
Karolina Wojciechowska



# Inhoud

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Inleiding .....</b>  | <b>3</b>  |
| 1.1      | Aanleiding tot het project .....  | 3         |
| 1.2      | Doelstelling .....  | 3         |
| 1.3      | Afbakening .....  | 4         |
| <b>2</b> | <b>Betrouwbaarheidsintervallen volgens de rapporten over de basispeilen.....</b>    | <b>5</b>  |
| 2.1      | Hoofdstations in de basispeilen.....  | 5         |
| 2.2      | Omnidirectionele BI's volgens de rapportage uit de basispeilen .....                | 5         |
| 2.2.1    | Symmetrische BI's .....   | 5         |
| 2.2.2    | BI's volgens bootstrapmethode .....   | 7         |
| <b>3</b> | <b>Gevoeligheidsanalyses voor Hoek van Holland en Delfzijl .....</b>                | <b>9</b>  |
| 3.1      | Beschouwde procedures om BI's te bepalen .....                                      | 9         |
| 3.2      | Hoek van Holland omnidirectioneel .....   | 11        |
| 3.2.1    | Moederverdeling Weibull en meerdere fitverdelingen .....                            | 11        |
| 3.2.2    | Moederverdeling en fit GPV .....  | 15        |
| 3.3      | Hoek van Holland richting 270° .....  | 17        |
| 3.3.1    | Moederverdeling Weibull en meerdere fitverdelingen .....                            | 17        |
| 3.4      | Delfzijl omnidirectioneel .....   | 20        |
| 3.4.1    | Moederverdeling Weibull en meerdere fitverdelingen .....                            | 20        |
| 3.4.2    | Moederverdeling en fit GPV .....  | 23        |
| 3.5      | Delfzijl richting 270°.....   | 25        |
| 3.5.1    | Moederverdeling Weibull en meerdere fitverdelingen .....                            | 25        |
| 3.6      | Invloed meetperiode .....   | 27        |
| 3.6.1    | Effect meetperiode Hoek van Holland omnidirectioneel.....                           | 27        |
| 3.6.2    | Effect meetperiode Delfzijl omnidirectioneel.....                                   | 30        |
| 3.7      | Invloed drempelwaarde.....  | 32        |
| 3.7.1    | Effect drempelwaarde Hoek van Holland omnidirectioneel .....                        | 32        |
| 3.7.2    | Effect drempelwaarde Delfzijl omnidirectioneel.....                                 | 34        |
| 3.8      | Conclusies en verdere aanpak .....  | 36        |
| 3.8.1    | Conclusies .....  | 36        |
| 3.8.2    | Aanpak voor bepalen BI's.....   | 37        |
| <b>4</b> | <b>Methode om BI's te bepalen voor kuststations .....</b>                           | <b>39</b> |
| 4.1      | Globale beschrijving van de aanpak .....  | 39        |
| 4.2      | Model voor onzekerheid bij exponentiële moederverdeling .....                       | 43        |
| 4.2.1    | Exponentiële verdeling en GPV's voor modelleren onzekerheid .....                   | 43        |
| 4.2.2    | Definitiegebied van $P(X_\gamma > x)$ .....   | 45        |
| 4.2.3    | ML-schatter voor GPV met bekende schaalparameter.....                               | 46        |
| 4.2.4    | Kansverdeling van $\gamma$ op basis van bootstrapsimulaties .....                   | 48        |
| 4.3      | Verwerken onzekerheid in de Weibullverdelingen voor de kust via transformatie ..... | 52        |
| 4.3.1    | 1 op 1 transformatie tussen X en zeewaterstand M.....                               | 52        |
| 4.3.2    | Toepassing transformatie om onzekerheid Weibullverdelingen te modelleren .....      | 55        |
| 4.3.3    | Hebben $\theta_0$ en $\sigma_0$ een speciale rol in de transformatie? .....         | 56        |
| 4.3.4    | Uitintegreren van onzekerheid voor X en M .....                                     | 56        |
| 4.4      | Procedure om BI's te bepalen.....   | 57        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 4.5      | Aanpak bias in het $10^{-4}$ -kwantiel .....                                     | 59        |
| 4.5.1    | Bias in $10^{-4}$ -kwantiel.....   | 59        |
| 4.5.2    | Verwijderen van de bias.....   | 61        |
| 4.5.3    | Alternatieve aanpak voor omgaan met de bias.....                                 | 62        |
| 4.6      | Keuze $\mu_w$ en $\sigma_w$ voor normale verdeling $w(\gamma)$ .....             | 63        |
| 4.6.1    | Keuzes voor Hoek van Holland.....  | 63        |
| 4.6.2    | Keuzes voor overige stations .....   | 65        |
| <b>5</b> | <b>Resultaten transformatiemethode voor de kust .....</b>                        | <b>69</b> |
| 5.1      | Resultaten BI's voor kuststations.....   | 69        |
| 5.1.1    | Vlissingen .....   | 69        |
| 5.1.2    | Hoek van Holland.....  | 71        |
| 5.1.3    | Den Helder.....  | 73        |
| 5.1.4    | Delfzijl.....  | 74        |
| 5.2      | Effect uitintegreren onzekerheid.....  | 76        |
| 5.2.1    | Hoek van Holland.....  | 76        |
| 5.2.2    | Vlissingen .....   | 76        |
| 5.2.3    | Den Helder.....  | 77        |
| 5.2.4    | Delfzijl.....  | 78        |
| <b>6</b> | <b>Aanpak IJsselmeergebied .....</b>   | <b>79</b> |
| 6.1      | Markermeer.....  | 80        |
| 6.1.1    | Keuzes betrouwbaarheidsintervallen.....  | 80        |
| 6.1.2    | Eindtabel Markermeer.....  | 82        |
| 6.2      | IJsselmeer.....  | 82        |
| 6.2.1    | Keuzes betrouwbaarheidsintervallen.....  | 82        |
| 6.2.2    | Eindtabel IJsselmeer .....   | 84        |
| 6.3      | Gevoeligheidsmodel frequentielijn IJsselmeer .....                               | 84        |
| <b>7</b> | <b>Conclusies en aanbevelingen .....</b>   | <b>87</b> |
| 7.1      | Gevolgde werkwijze.....  | 87        |
| 7.1.1    | BI's in de basispeilen .....   | 87        |
| 7.1.2    | Gevoeligheidsonderzoek kust.....   | 87        |
| 7.1.3    | Methode voor bepalen BI's en eindtabellen.....                                   | 87        |
| 7.2      | Algemene bevindingen .....   | 88        |
| 7.2.1    | Kuststations .....   | 88        |
| 7.2.2    | IJssel- en Markermeer .....  | 89        |
|          | <b>Referenties .....</b>   | <b>91</b> |
|          | <b>Bijlage A Moeder- en fitverdeling Weibull, voor meetperiode 500 jaar.....</b> | <b>93</b> |
|          | <b>Bijlage B Eindtabellen hoofdstations voor de kust .....</b>                   | <b>95</b> |

# 1 Inleiding

## 1.1 Aanleiding tot het project

Het is de bedoeling om voor de WTI2017 in het probabilistisch model Hydra-Ring onzekerheden van basisstochasten mee te nemen, waaronder zeewaterstanden (kuststations) en meerpeilen van het IJssel- en Markermeer. Daarvoor zijn 95%-betrouwbaarheidsintervallen (BI's) nodig voor de kwantilen van meerdere overschrijdingsfrequenties van deze stochasten.

Hier volgt een voorbeeld van de betekenis van een dergelijk 95%-BI, toegepast op de omnidirectionele overschrijdingsfrequentie van de zeewaterstand te Hoek van Holland, voor zichtjaar 1985. Het  $10^{-4}$ -kwantiel (basispeil) van deze frequentieverdeling is volgens [Dillingh et al, 1993a] gelijk aan 5.00 m+NAP, wat inhoudt dat het waterstandsniveau 5.00 m+NAP een overschrijdingsfrequentie heeft van  $10^{-4}$  per jaar. De waarde 5.00 m+NAP is echter het resultaat van een statistische extrapolatie op basis van een meetreeks van (slechts) ongeveer 100 jaar, waardoor dit getal volstrekt niet nauwkeurig valt te bepalen: de extrapolatie dient namelijk tot ver buiten het bereik van de data te worden uitgevoerd. Het 95%-BI geeft de grenzen aan waartussen met 95% betrouwbaarheid het 'werkelijke'  $10^{-4}$ -kwantiel zal liggen. Als resultaat uit de voorliggende studie resulteert in dit geval een 95%-BI van (afgeronde getallen):

$$[3.8 \text{ m+NAP}, 7.0 \text{ m+NAP}] = [5.0 - 1.2 \text{ m+NAP}, 5.0 + 2.0 \text{ m+NAP}]$$

Losjes gezegd kan dit geïnterpreteerd worden als: de kans dat het 'werkelijke'  $10^{-4}$ -kwantiel deel uitmaakt van dit interval is 95%. Overigens zal duidelijk worden dat de bepaalde BI's sterk afhangen van allerlei keuzes in de gevolgde afleiding daarvan.

## 1.2 Doelstelling

Het doel is het bepalen van 95%-betrouwbaarheidsintervallen voor de kwantilen van de overschrijdingsfrequenties voor een aantal kuststations en het IJsselmeergebied. Voor de kuststations dienen omnidirectionele en de relevante directionele verdelingen te worden beschouwd (betreft de sectoren  $210^\circ - 360^\circ$ ). Ook dienen kentallen te worden gegeven om de BI's te kunnen bepalen.

De BI's dienen van toepassing te zijn op de vigerende statistiek voor het IJsselmeergebied en de kuststations.

De beschouwde kuststations zijn:

- Vlissingen
- OS11
- Hoek van Holland
- IJmuiden Buitenhaven
- Den Helder
- Harlingen
- Lauwersoog
- Delfzijl

De beschouwde meren zijn:

- IJsselmeer
- Markermeer

In het bepalen van de BI's wordt in de analyses vooral gekeken naar het 95%-BI. Maar in de uiteindelijke resultaten worden ook andere BI's gegeven, zoals bijvoorbeeld het 90%-BI en het 80%-BI.

### **1.3 Afbakening**

De 95%-BI's die in dit rapport worden afgeleid betreffen *voorstellen* daarvoor; gezien de grote mate van subjectiviteit bij het bepalen van deze BI's zijn ook andere keuzes mogelijk. Verder wordt opgemerkt dat voor  $10^{-4}$ -kwantielen – en zeker voor de  $10^{-5}$ -kwantielen – soms enorm hoge zeewaterstanden resulteren, waarvan het de vraag is of deze fysisch gezien wel kunnen optreden. Dergelijke fysische overwegingen maken echter geen deel uit van dit project.

## 2 Betrouwbaarheidsintervallen volgens de rapporten over de basispeilen

Voordat analyses voor betrouwbaarheidsintervallen (BI's) worden gegeven wordt hieronder eerst beschreven hoe BI's in de rapporten over de basispeilen worden bepaald [Dillingh et al, 1993a; 1993b], [Van Urk, 1993].

### 2.1 Hoofdstations in de basispeilen

In het eindverslag van de basispeilen langs de Nederlandse kust [Van Urk, 1993] worden de volgende hoofdstations genoemd, waarbij ook de lengtes van de beschikbare meetreeksen van HW-standen zijn gegeven:

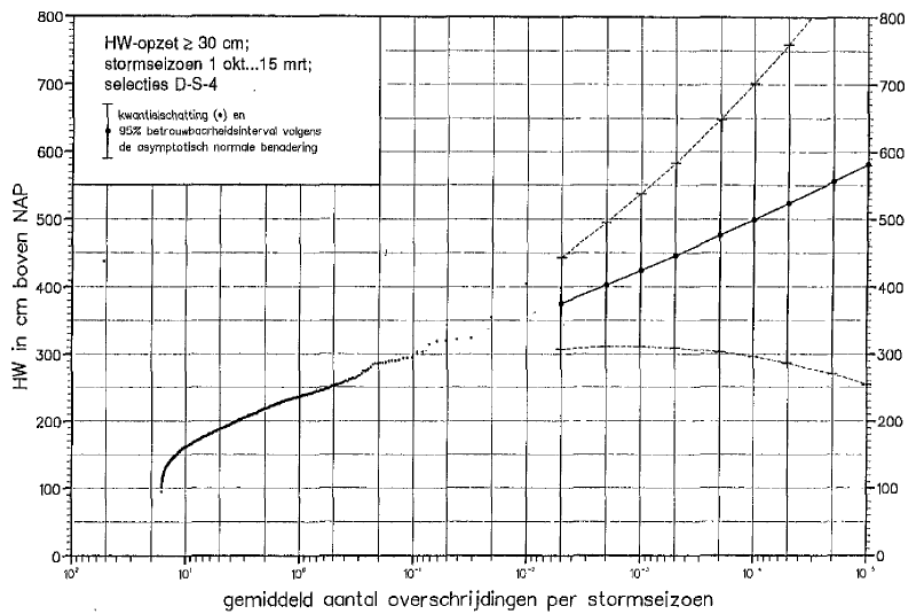
- Vlissingen 1881...1985
- Hoek van Holland 1887...1985
- Den Helder 1932...1985
- Harlingen 1932...1985
- Delfzijl 1881...1985

Merk op dat de reeksen voor Den Helder en Harlingen, vanwege de afsluiting van de Zuiderzee in juni 1932, korter zijn dan de overige reeksen: ruwweg 50 jaar versus 100 jaar voor de overige reeksen.

### 2.2 Omnidirectionele BI's volgens de rapportage uit de basispeilen

#### 2.2.1 Symmetrische BI's

In het rapport [Dillingh et al, 1993a] zijn veelvuldig symmetrische 95%-BI's gepresenteerd. Deze BI's zijn bepaald op basis van meerdere methodes, zoals het fitten van een Gegeneraliseerde Pareto Verdeling (GPV), de Gegeneraliseerde Extreme waarden Verdeling (GEV) of de zogenaamde VVM-0 methode (een niet-parametrische methode ontwikkeld door Laurens de Haan). Figuur 2-1 geeft een voorbeeld van dergelijke BI's.



Figuur 2-1: Symmetrische 95%-BI's Hoek van Holland (model VVM-0). Bron: [Dillingh et al, 1993b], Bijlage 30B.

In het genoemde rapport wordt echter nadrukkelijk opgemerkt dat dergelijke symmetrische BI's, die het resultaat zijn van een *benaderende* methode, geen goede weergave zullen geven van de werkelijkheid. De benadering maakt gebruik van het feit dat kwantileschattingen asymptotisch normaal verdeeld zijn, zie paragraaf 7.3 uit [Dillingh et al, 1993a], maar deze benadering blijkt in de toegepaste situaties dus niet gerechtvaardigd te zijn.

Dat blijkt ook uit het feit – eveneens benadrukt in het genoemde rapport – dat de ondergrenzen van de BI's een theoretisch onmogelijk verloop hebben. Zo is bijvoorbeeld de ondergrens van het  $10^{-4}$ -kwantiel in Figuur 2-1 gelijk aan (afgerond) 3.0 m+NAP, terwijl die voor het  $10^{-5}$ -kwantiel gelijk is aan de *lagere* waarde 2.5 m+NAP. Dat laatste kan theoretisch niet het geval zijn.

Overigens is in te zien dat de ondergrens van bijvoorbeeld 3.0 m+NAP voor het  $10^{-4}$ -kwantiel nooit correct kan zijn. Figuur 2-1 laat zien dat dit niveau in de meetreeks van (nagenoeg) 100 jaren 9 maal overschreden wordt. Het niveau 3.0 m+NAP heeft volgens de data dan een geschatte terugkeertijd van  $T = 100/9 = 11$  jaar. Het is dan praktisch ondenkbaar dat het 'werkelijke'  $10^{-4}$ -kwantiel dan 3.0 m+NAP (of lager) zou zijn. Aan dat laatste kan overigens een kans worden gekoppeld, zie onderstaand kader.



*Wat is de kans op een  $10^{-4}$ -kwantiel van 3.0 m+NAP of lager?*

Stel dat het werkelijke  $10^{-4}$ -kwantiel 3.0 m+NAP zou zijn. Neem aan dat de meetperiode 100 jaar bedraagt, met dan kans  $p = 100/10000 = 0.01$  dat in een willekeurig jaar het niveau 3.0 m+NAP wordt overschreden. Volgens de binomiale verdeling volgt dan:

$$\text{Kans op minstens 9 overschrijdingen in 100 jaar} = 8.4 \cdot 10^{-7}$$

Dus: als het werkelijke  $10^{-4}$ -kwantiel 3.0 m+NAP bedraagt, is de kans dat in de meetperiode daarvan minstens 9 overschrijdingen worden aangetroffen circa 1 op het miljoen. Als het werkelijke  $10^{-4}$ -kwantiel gelijk is aan 3.0 m+NAP, of nog lager, is de kans op minstens 9 overschrijdingen daarvan nog kleiner dan 1 op het miljoen.

Op grond hiervan mag wel worden uitgesloten dat het symmetrische BI uit Figuur 2-1 voor  $T = 10000$  jaar correct is.

### 2.2.2 BI's volgens bootstrapmethode

Vanwege de hier genoemde onvolkomenheden zijn in [Dillingh et al, 1993a] ook BI's afgeleid die geen gebruik maken van de benadering dat de kwantielschattingen normaal verdeeld zouden zijn. Daartoe zijn bootstrapmethodes gebruikt. Voor bijvoorbeeld de GPV gaat dat als volgt (Aanhangsel 3 uit [Dillingh et al, 1993a]):

1. Uitgangspunt is de GPV-verdeling met parameters zoals bepaald uit de Peaks Over Threshold reeksen (POT-reeksen), geselecteerd voor een drempelwaarde  $u$  met de zogenaamde methode DS-4, waarbij HW's minimaal 4 getijperiodes uit elkaar dienen te liggen. Dat laatste levert bij benadering onafhankelijk geachte pieken.
2. Uit deze zogenaamde 'moeder'-verdeling wordt een steekproef van  $k$  onafhankelijke trekkingen genomen volgens een Monte Carlo procedure (met  $k$  geschikt gekozen, zie onder). Uit deze steekproef worden de parameters  $\gamma$  en  $\sigma$  van de GPV-verdeling bepaald met de Maximum Likelihood (ML) methode, waarna de verschillende kwantielen kunnen worden geschat.
3. Deze simulatie wordt 10000 keer uitgevoerd. Uit de 10000 schattingen per kwantiel kunnen dan de gewenste karakteristieken van de kansverdeling van de kwantielschatting worden bepaald. I.h.b. volgt dan het 95%-BI.

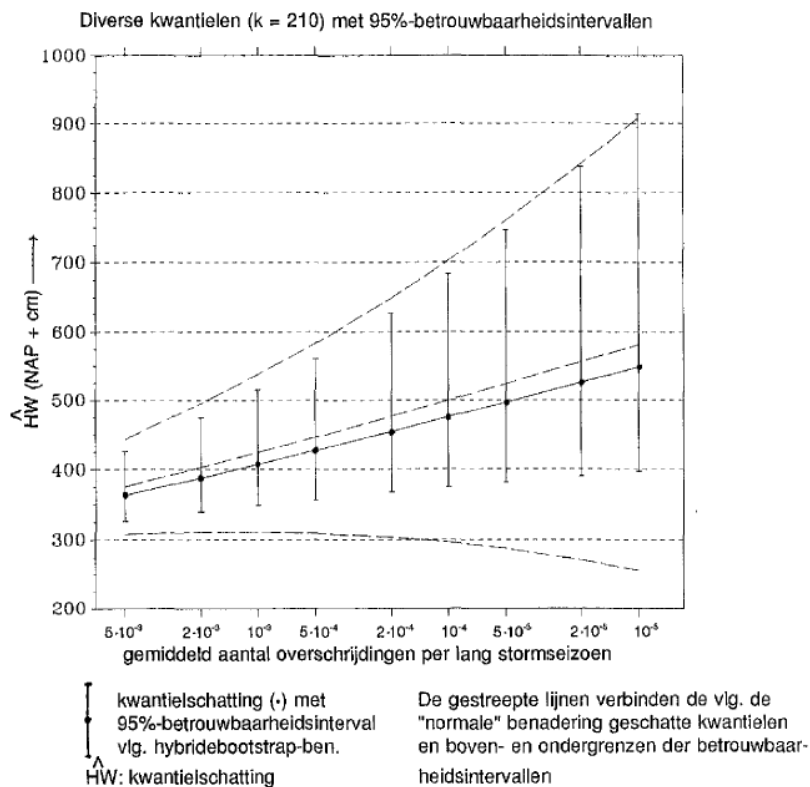
Ad 2.

De waarde  $k$  is gekoppeld aan de drempelwaarde  $u$ :  $k$  is gelijk aan het aantal pieken in de meetreeks dat  $u$  overschrijdt (hoe hoger  $u$ , hoe lager  $k$ ). De GPV is de verdeling die theoretisch gezien limiteert naar de kansverdeling voor de pieken, in de limiet waarbij de drempelwaarde  $u$  naar  $\infty$  gaat. Vandaar dat  $k$  in principe zo laag mogelijk moet worden gekozen. Dat levert echter instabiele schattingen voor de GPV-parameters  $\gamma$  en  $\sigma$ . In [Dillingh et al, 1993a] is  $k$  zo gekozen dat voor waarden die 'rondom  $k$  liggen' stabiele schattingen voor  $\gamma$  en  $\sigma$  worden gevonden.

Voor bijvoorbeeld Hoek van Holland geldt voor de moederverdeling :  $u = 210$  cm+NAP,  $\gamma = -0.0102$ ,  $\sigma = 27.71$  cm, waarbij  $k = 249$ . N.B. Voor een meetreeks van 99 jaar levert dat een overschrijdingsfrequentie van  $u$  van  $249/99 = 2.5$  per jaar.

Na toepassen van de punten 1 t/m 3 uit de bootstrap-procedure wordt voor het  $10^{-4}$ -kwantiel dan 479 cm+NAP gevonden, met 95%-betrouwbaarheidsinterval [369 cm+NAP, 651 cm+NAP] = [479-110 cm+NAP, 479+172 cm+NAP].

In [Dillingh et al, 1993a] zijn geen figuren gegeven voor de resulterende GPV-BI's zoals bepaald met de bootstrapmethode. Wel zijn figuren gegeven voor op soortgelijke wijze bepaalde BI's – aangeduid als *hybride* bootstrapmethode – voor het model VVM-0, zie als voorbeeld Figuur 2-2. Merk op de dat de BI's nu netjes oplopende ondergrenzen hebben. Wel wordt in [Dillingh et al, 1993a] opgemerkt dat de (hybride) bootstrap methode voor model VVM-0 theoretische onderbouwing mist, omdat getrokken wordt uit een *parametrische* moederverdeling, terwijl VVM-0 juist een *niet*-parametrische methode betreft.



Figuur 2-2: 95%-BI's Hoek van Holland zoals bepaald met de hybride bootstrapmethode (model VVM-0). Bron: [Dillingh et al, 1993b], Bijlage 35B. Ook zijn de symmetrische BI's uit Figuur 2-1 weergegeven.

In dit onderzoek wordt voor de hoofdvariant uit de analyses gekozen voor een bootstrapmethode met de GPV als fitverdeling, terwijl methode VVM-0 verder niet wordt beschouwd.

### 3 Gevoeligheidsanalyses voor Hoek van Holland en Delfzijl

In dit hoofdstuk worden niet-symmetrische BI's bepaald, enigszins analoog aan de bootstrapmethode waarop in de basispeilen dergelijke BI's zijn bepaald op basis van de GPV (zie de beschrijving in paragraaf 2.2.2). Een verschil met de aanpak uit de basispeilen is echter dat nu als moederverdeling niet alleen de GPV maar ook de Weibullverdeling wordt gebruikt. Als fitverdeling worden behalve de GPV ook de exponentiële en de Weibullverdeling beschouwd. In de analyses wordt ook onderzocht wat de invloed is op het BI van de meetperiode en de keuze van de drempelwaarde voor de bootstraps.

#### 3.1 Beschouwde procedures om BI's te bepalen

Er wordt een aantal analyses gedaan. Als referentiesituatie wordt daarbij uitgegaan van een meetperiode van 100 jaar. Deze keuze stemt (nagenoeg) overeen met de lengte van de meetreeksen voor de hoofdkuststations uit de basispeilen, zie paragraaf 2.1. Uitzondering hierop vormen de stations Den Helder en Harlingen, die vanwege de aanleg van de Afsluitdijk kortere meetreeksen hebben (circa 50 jaar). De uiteindelijke statistiek uit de basispeilen is echter niet alleen gebaseerd op statistische overwegingen, maar ook op fysieke verbanden tussen stations met langere meetreeksen, zie hierover paragraaf 3.3 uit [Van Urk, 1993]. Daarom wordt er hier van uitgegaan dat een meetperiode van 100 jaar representatief is voor de onzekerheid. Wel wordt onderzocht wat de gevoeligheid is voor de beschouwde meetperiode.

Voor een beschouwde meetperiode wordt om BI's te bepalen in het vervolg de bootstrapmethode gebruikt, zoals ook toegepast voor de basispeilen (zie paragraaf 2.2.2). Maar waar in die paragraaf alleen trekkingen voor de GPV werden beschouwd, worden nu behalve deze verdeling ook andere kansverdelingen onderzocht, namelijk de Weibullverdeling en de exponentiële verdeling.

| Moederverdeling |                 |             | Gefitte verdeling |     |              |
|-----------------|-----------------|-------------|-------------------|-----|--------------|
| Weibull         | Hoek v. Holland | omni        | Weibull           | GPV | Exponentieel |
| GPV             | Hoek v. Holland | omni        | ***               | GPV | ***          |
| Weibull         | Hoek v. Holland | r = 270 gr. | Weibull           | GPV | Exponentieel |

| Moederverdeling |          |             | Gefitte verdeling |     |              |
|-----------------|----------|-------------|-------------------|-----|--------------|
| Weibull         | Delfzijl | omni        | Weibull           | GPV | Exponentieel |
| GPV             | Delfzijl | omni        | ***               | GPV | ***          |
| Weibull         | Delfzijl | r = 270 gr. | Weibull           | GPV | Exponentieel |

| Moederverdeling en fit    |                 |      | Meetperiode (N jaar) |    |     |     |
|---------------------------|-----------------|------|----------------------|----|-----|-----|
| Moeder: Weibull, Fit: GPV | Hoek v. Holland | omni | 100                  | 50 | 130 | 500 |
| Moeder: Weibull, Fit: GPV | Delfzijl        | omni | 100                  | 50 | 130 | 500 |

| Moederverdeling en fit    |                 |      | Drempelfrequentie, 1/jaar |     |   |   |
|---------------------------|-----------------|------|---------------------------|-----|---|---|
| Moeder: Weibull, Fit: GPV | Hoek v. Holland | omni | 2.5                       | 0.5 | 1 | 5 |
| Moeder: Weibull, Fit: GPV | Delfzijl        | omni | 2.5                       | 0.5 | 1 | 5 |

Tabel 3-1 Beschouwde analyses, voor zichtjaar 1985. De meetperiode en drempelfrequentie voor de referentiesituatie uit dit hoofdstuk zijn vetgedrukt.

De analyses die in dit hoofdstuk worden uitgevoerd, staan in Tabel 3-1. De gegevens voor de moederverdelingen zijn voor de Weibulls afkomstig uit Hydra-K HR2006, en voor de GPV's uit [Philippart et al, 1995]. Hierover de volgende opmerkingen:

1. Uitgangspunt is dat de gegevens representatief zijn voor zichtjaar 1985 uit de basispeilen. Voor Hoek van Holland en Delfzijl is in de *Weibull*verdelingen uit de HR2006 t.o.v. 1985 een zeespiegelstijging van 7 cm aangenomen. De analyses uit dit rapport zijn steeds gedaan met de HR2006 gegevens, maar daarna zijn in de figuren de frequentielijnen steeds met 7 cm naar beneden verschoven, om grafisch de situatie van 1985 te verkrijgen.
2. De parameters voor de omnidirectionele GPV verdelingen, voor zichtjaar 1985, zijn overgenomen uit paragraaf 4.3 van [Philippart et al, 1995]. Er zijn echter geen parameters voor directionele GPV's beschikbaar. Vandaar dat voor de GPV als moederverdeling geen directionele gegevens zijn beschouwd.

De moederverdelingen hebben bepaalde drempelfrequenties (voor de Weibulls dus bekend uit de HR2006-gegevens en voor de GPV's uit [Philippart et al, 1995]). Bij de bootstrapmethode worden echter ook drempels gekozen waarboven trekkingen worden verricht, die niet gelijk hoeven te zijn aan de (originele) drempels uit de moederverdelingen.<sup>1</sup> In dit onderzoek wordt voor het doen van de trekkingen in de referentiesituatie uitgegaan van een drempel met overschrijdingsfrequentie 2.5 per jaar. Deze waarde stemt overeen met die uit de basispeilen voor Hoek van Holland, zie de beschrijving uit paragraaf 2.2.2 van de manier waarop in de basispeilen op basis van de GPV niet-symmetrische BI's worden bepaald. Verderop geven we meer commentaar over de drempelkeuze, en wordt ook onderzocht wat het effect daarvan is op de BI's (paragraaf 3.7).

De keuze voor de overschrijdingsfrequentie van de 'trekkingsdrempel' legt meteen ook de drempel uit de te fitten verdeling vast (Weibull, GPV of exponentieel). Deze drempel krijgt dan ook als overschrijdingsfrequentie 2.5 per jaar toegkend.

In de referentiesituatie wordt zoals gezegd een meetperiode beschouwd van  $N = 100$  jaar. Bij drempelfrequentie 2.5 per jaar worden dan  $2.5 \cdot 100 = 2500$  waarnemingen getrokken uit de moederverdeling. Standaard worden  $N_b = 10000$  bootstraps uitgevoerd. Per bootstrap kunnen dan, uit de 2500 gesimuleerde waarnemingen, de parameters van de fitverdeling worden bepaald, wat wordt gedaan met de methode van **Maximum Likelihood** (ML-schatting). Dat resulteert dus in 10000 parameter-sets voor de fitverdelingen (oftewel 10000 verschillende gefitte verdelingen). Als bijvoorbeeld een Weibullverdeling wordt gefit, met twee parameters, een schaalparameter  $\sigma$  en een vormparameter  $\alpha$ , leveren de bootstraps 10000 paren  $(\sigma_i, \alpha_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10000$ .

---

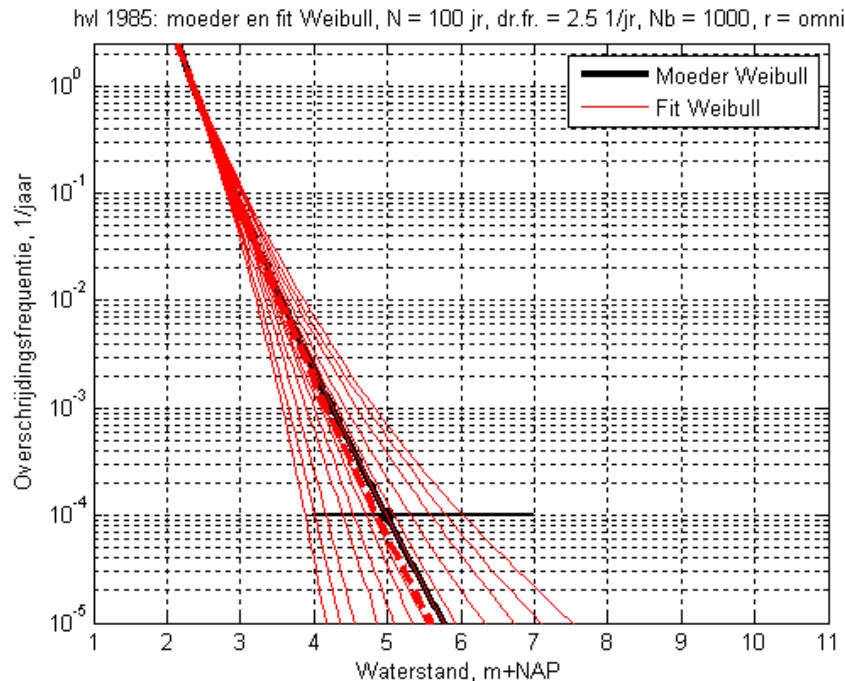
<sup>1</sup> De originele Weibulldrempels zijn vaak geheel anders dan de drempelwaarden die een rol hebben gespeeld in de afleiding van de frequentielijnen in de basispeilen-rapporten. Die originele drempels hoeven daarom geen rol van betekenis te spelen in de afleiding van de BI's.

## 3.2 Hoek van Holland omnidirectioneel

### 3.2.1 Moederverdeling Weibull en meerdere fitverdelingen

#### Moeder Weibull; fit Weibull

De resultaten voor moederverdeling Weibull-omni en fitverdeling Weibull staan in Figuur 3-1.



Figuur 3-1 Moederverdeling: Weibull; fit: Weibull. Hoek van Holland (omni).

Deze figuur bevat de nodige informatie, die nu beschreven wordt:

1. De titel bevat de volgende informatie:
  - a. Afkorting voor gekozen station met zichtjaar (hier hvl 1985).
  - b. Keuze moeder- en fitverdeling (hier moeder en fit Weibull).
  - c. Keuze N voor meetperiode (hier N = 100 jaar).
  - d. Keuze drempelfrequentie voor de trekkingen uit de moederverdeling (hier 2.5 per jaar).
  - e. Keuze  $N_b$  voor aantal bootstraps (hier  $N_b = 1000$ ).<sup>2</sup>
  - f. Aanduiding 'r = omni' of beschouwde de windrichting r (hier r = omni).
2. De Moederverdeling is grafisch weergegeven door de vette zwarte lijn. Ter hoogte van overschrijdingsfrequentie  $F = 10^{-4}$  per jaar is een horizontale zwarte lijn getrokken die t.o.v. het  $10^{-4}$ -kwantiel begint bij 1 m lagere waterstand, en eindigt bij een 2 m hogere waterstand. Dit arbitrair gekozen 'lijnstuk' helpt bij de vergelijking tussen verschillende figuren.

<sup>2</sup> Standaard worden 10000 bootstraps verricht, maar vanwege de zeer lange rekentijden bij het bepalen van de fitparameters uit de Weibullverdeling, wordt nu uitgegaan van 1000 bootstraps. Ook met dit aantal wordt het BI goed in beeld gebracht.

3. De doorgetrokken rode lijnen corresponderen met de grenzen van de BI's; deze lijnen horen bij de waarden uit Tabel 3-2. Om bijvoorbeeld te weten wat het 95%-BI is voor het  $10^{-4}$ -kwantiel, moet worden gekeken naar de buitenste lijnen, die horen bij percentages 2.5% en 97.5%. Het 95%-kwantiel heeft volgens de figuur dan als 95%-BI het interval [3.88 m+NAP, 6.0 m+NAP]. Zie verder de uitleg hieronder.
4. De gestreepte rode lijn geeft het gemiddelde van de kwantielen bij een beschouwde frequentie. Bij bijvoorbeeld frequentie  $10^{-4}$  per jaar resulteren in dit geval  $N_b = 1000$  waarden voor het  $10^{-4}$ -kwantiel: één waarde per gefitte verdeling. Het gemiddelde van deze kwantielen is 4.86 m+NAP, wat op de gestreepte rode lijn ligt.

|     |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |      |
|-----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|------|
| 2.5 | 5 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 95 | 97.5 |
|-----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|------|

Tabel 3-2 Percentages waarvoor de percentielen (rode lijnen) in de figuren met BI's worden bepaald.

Ad 3.

Hier volgt nadere uitleg bij de rode doorgetrokken lijnen. Zoals gezegd worden in dit geval  $N_b = 1000$  verdelingen bepaald. Voor bijvoorbeeld het  $10^{-4}$ -kwantiel levert dat 1000 waarden. De bovenste rode lijn uit Figuur 3-1, die hoort bij 97.5%, is dan bepaald door het 97.5-percentiel van deze 1000  $10^{-4}$ -kwantielen te bepalen (de waarde waaronder 975 van de kwantielen ligt). Evenzo is de middelste rode lijn, die hoort bij 50%, dan de mediaan van deze 1000  $10^{-4}$ -kwantielen. Zo kan bij elk percentage  $p$  uit Tabel 3-2 het  $p$ -de percentiel van de  $10^{-4}$ -kwantielen worden bepaald. Uiteraard kan deze procedure, behalve voor frequentie  $10^{-4}$  per jaar, worden gedaan voor iedere beschouwde frequentie.

Tot zover de beschrijving van de onderdelen uit Figuur 3-1. Nu volgt een bespreking van de resultaten.

Als eerste noemen we dat het gemiddelde van de  $10^{-4}$ -kwantielen (zie punt 4) gelijk is aan 4.86 m+NAP, wat 0.14 m onder het  $10^{-4}$ -kwantiel van 5.0 m+NAP uit de moederverdeling ligt. Blijkbaar heeft de ML-schatting een bias. Deze bias blijkt kleiner te worden voor een langere meetperiode, zoals in Bijlage A is geverifieerd voor een meetperiode van 500 jaar.

Als tweede het volgende. Het 95%-BI voor het  $10^{-4}$  kwantiel is het interval (zie punt 3):

$$[3.88 \text{ m+NAP}, 6.0 \text{ m+NAP}] = [4.86 - 0.98 \text{ m+NAP}, 4.86 + 1.22 \text{ m+NAP}] \quad (3.1)$$

Dit interval is duidelijk smaller dan het interval op basis van de GPV uit de basispeilen, waar werd gevonden (zie paragraaf 2.2.2):

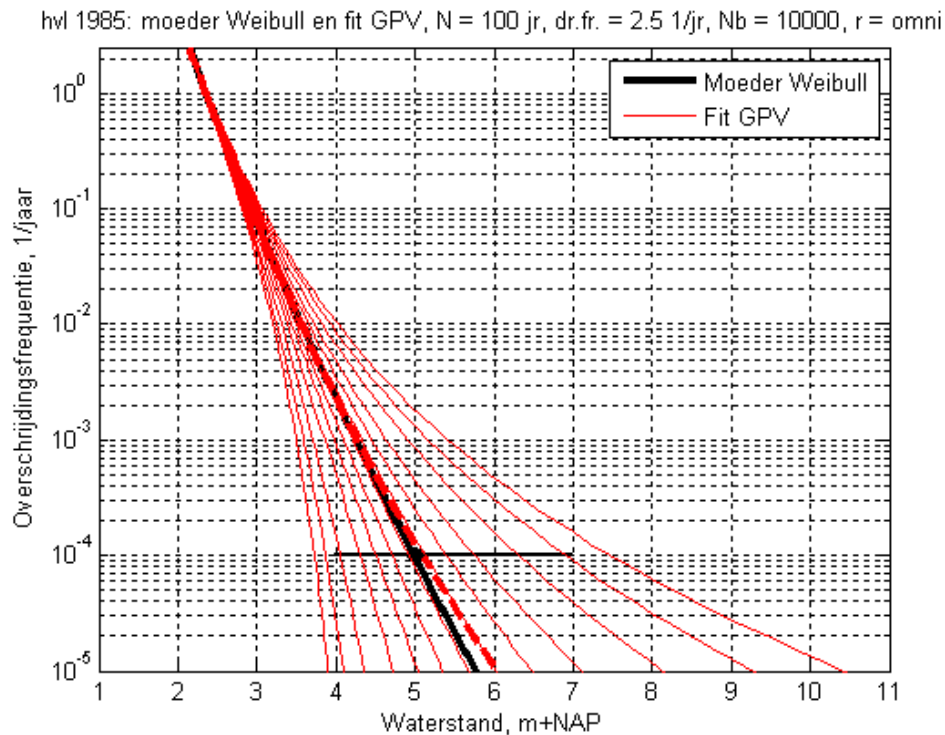
$$[3.69 \text{ m+NAP}, 6.51 \text{ m+NAP}] = [4.79 - 1.10 \text{ m+NAP}, 4.79 + 1.72 \text{ m+NAP}] \quad (3.2)$$

Ons inziens is het interval volgens de Weibullverdeling te smal. Voor bijvoorbeeld de GPV, die hierna wordt beschouwd, blijken veel bredere BI-s te resulteren.

Wat de geconstateerde bias betreft het volgende. In het vervolg blijkt, bij andere fitverdelingen en moederverdelingen, ook sprake te zijn van een bias. We zullen het BI steeds bepalen t.o.v. het kwantiel-gemiddelde, zoals in het tweede lid uit (3.1) en (3.2). De bias wordt verder niet becommentarieerd (op een enkele uitzondering na als deze heel groot is).

### Moeder Weibull; fit GPV

Bij dezelfde moederverdeling (Weibull) kan als fitverdeling ook de GPV worden beschouwd. De resultaten daarvoor staan in Figuur 3-2.



Figuur 3-2 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Hoek van Holland (omni).

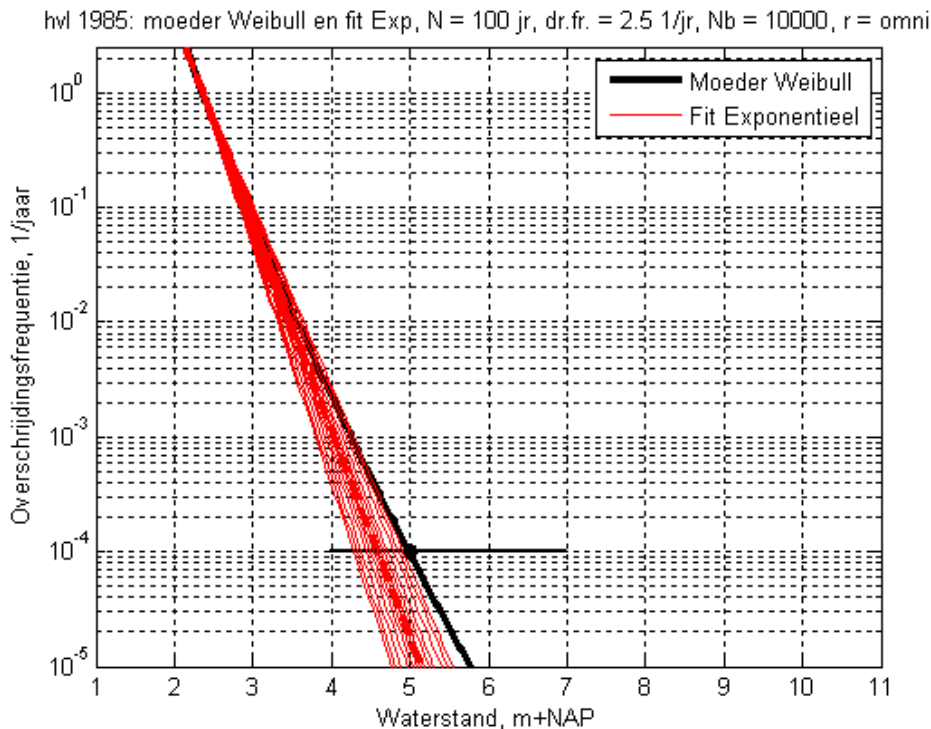
Het 95%-BI blijkt in dit geval:

$$[3.73 \text{ m+NAP}, 7.46 \text{ m+NAP}] = [5.09 - 1.36 \text{ m+NAP}, 5.09 + 2.37 \text{ m+NAP}] \quad (3.3)$$

Dit interval is aanzienlijk breder dan dat volgens de Weibullverdeling, zie (3.1). Het is ook breder dan dat volgens de basispeilen uit (3.2).

### Moeder Weibull; fit exponentieel

Bij dezelfde moederverdeling (Weibull) kan als fitverdeling ook de exponentiële worden beschouwd. De resultaten daarvoor staan in Figuur 3-2.



Figuur 3-3 Moederverdeling: Weibull; fit: exponentieel. Hoek van Holland (omni).

Het 95%-BI blijkt in dit geval:

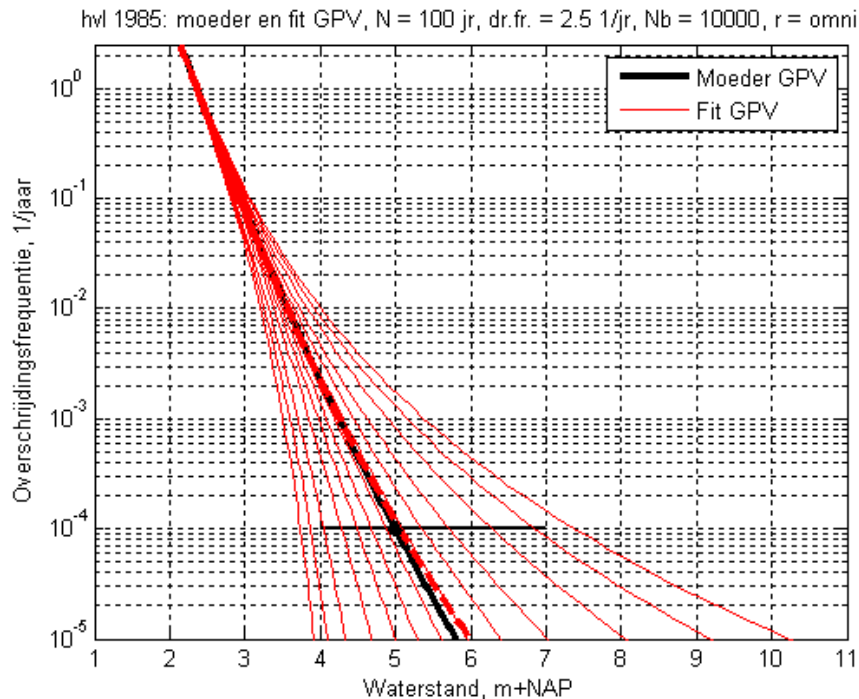
$$[4.28 \text{ m+NAP}, 4.91 \text{ m+NAP}] = [4.59 - 0.30 \text{ m+NAP}, 4.59 + 0.33 \text{ m+NAP}] \quad (3.4)$$

Dit interval is heel smal. Bovendien is de bias hier heel groot. De exponentiële verdeling kan de kromming van de moederverdelingverdeling simpelweg niet volgen. Feitelijk is het ook niet erg zinnig om voor een moederverdeling *met kromming* een exponentiële verdeling te fitten (die geen kromming vertoont). De reden om dat hier toch te doen, is om gevoel te krijgen voor de breedte van het BI bij fitten van de exponentiële verdeling. Ons inziens wordt de werkelijke onzekerheid in het  $10^{-4}$ -kwantiel bij toepassing van de exponentiële verdeling sterk onderschat.



### 3.2.2 Moederverdeling en fit GPV

Nu wordt als moederverdeling de GPV gekozen, waaraan een GPV wordt gefit. De resultaten daarvoor staan in Figuur 3-4.



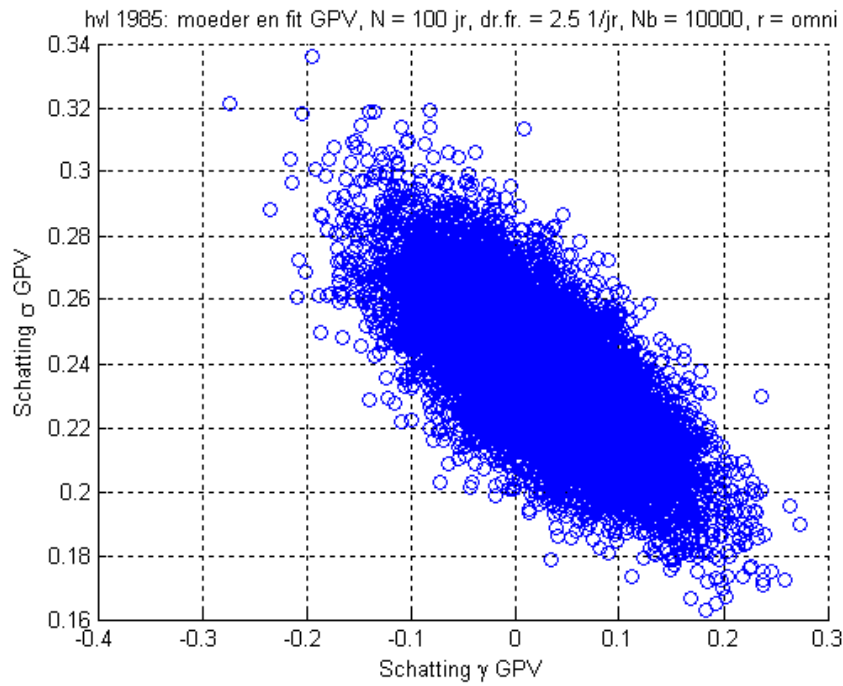
Figuur 3-4 Moederverdeling: GPV; fit: GPV. Hoek van Holland (omni).

Het 95%-BI blijkt in dit geval:

$$[3.74 \text{ m+NAP}, 7.37 \text{ m+NAP}] = [5.06 - 1.32 \text{ m+NAP}, 5.06 + 2.31 \text{ m+NAP}] \quad (3.5)$$

De hier beschouwde situatie is vergelijkbaar met de bootstrapmethode zoals toegepast voor de basispeilen (zie paragraaf 2.2.2). Voor de basispeilen resulteert echter het interval uit (3.2), dat smaller is. Een verschil met de basispeilen is echter dat nu een andere GPV als moederverdeling is gekozen, namelijk die met  $10^{-4}$ -kwantiel 5.0 m+NAP, terwijl dat in de basispeilen voor de beschouwde GPV gelijk was aan 4.79 m+NAP. Vandaar de verschillen in de breedte (en ligging) van de BI's.

Verderop in dit onderzoek zullen we GPV's beschouwen met een vaste waarde van de schaalparameter  $\sigma$  van de GPV. Het is interessant om te zien wat voor de gefitte verdelingen de spreiding is in de schaalparameter, en tevens die in de vormparameter  $\gamma$ . Dat is te zien in Figuur 3-5. Het blijkt dat er een duidelijk verband bestaat tussen deze parameters: hogere waarden voor  $\gamma$  gaan samen met lagere waarden voor  $\sigma$ .



Figuur 3-5 Moederverdeling: GPV; fit: GPV: verband tussen schaal- en vormparameter uit de gefitte verdelingen. Hoek van Holland (omni).

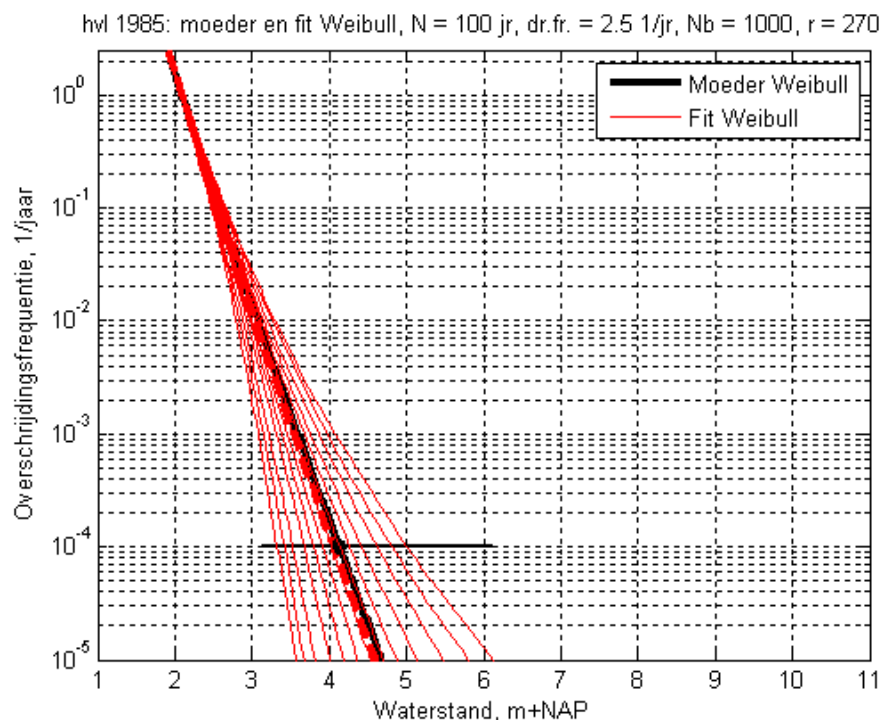
### 3.3 Hoek van Holland richting 270°

I.p.v. de omnidirectionele verdeling voor Hoek van Holland wordt nu richting 270° beschouwd. De resultaten blijken niet wezenlijk anders dan voor de omnidirectionele verdeling, vandaar dat het commentaar beknopt blijft.

#### 3.3.1 Moederverdeling Weibull en meerdere fitverdelingen

##### Moeder Weibull (270°); fit Weibull

De resultaten voor moederverdeling Weibull (270°) en fitverdeling Weibull staan in Figuur 3-6.



Figuur 3-6 Moederverdeling: Weibull; fit: Weibull. Hoek van Holland (270°).

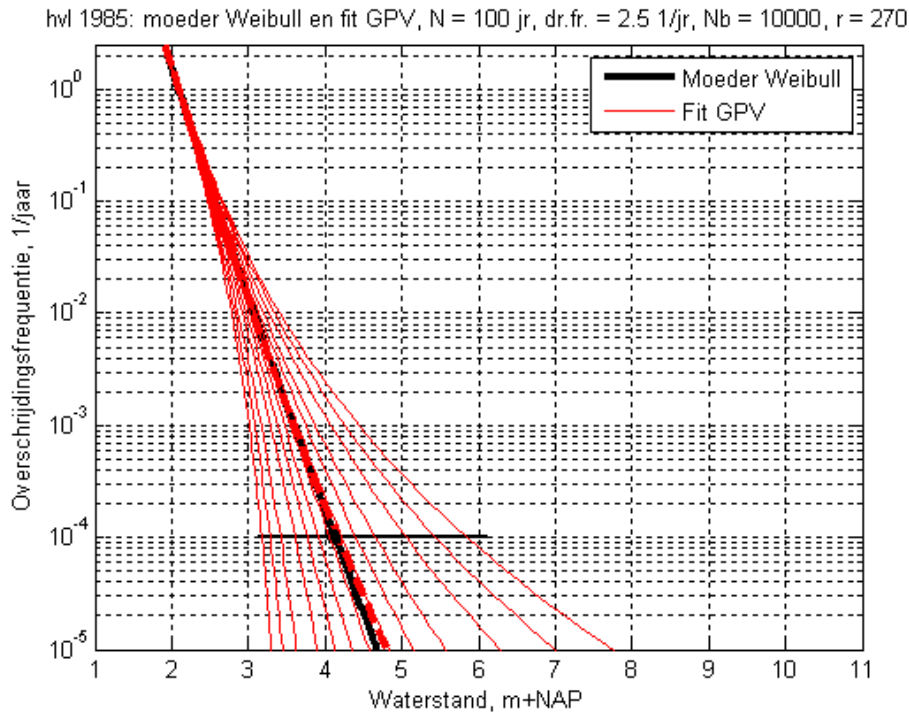
Het 95%-BI voor het  $10^{-4}$  kwantiel is het interval (zie punt 3):

$$[3.33 \text{ m+NAP}, 5.00 \text{ m+NAP}] = [4.0 - 0.73 \text{ m+NAP}, 4.05 + 0.95 \text{ m+NAP}] \quad (3.6)$$

Dit interval is iets smaller dan dat voor de omnidirectionele verdeling, wat plausibel is, omdat het  $10^{-4}$ -kwantiel voor 270° ook lager ligt dan het omnidirectionele  $10^{-4}$ -kwantiel van 5.00 m+NAP.

**Moeder Weibull (270°); fit GPV**

Voor de GPV als fitverdeling staan de resultaten Figuur 3-7.



Figuur 3-7 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Hoek van Holland (270°).

Het 95%-BI blijkt in dit geval:

$$[3.18 \text{ m+NAP}, 5.85 \text{ m+NAP}] = [4.17 - 0.99 \text{ m+NAP}, 4.17 + 1.67 \text{ m+NAP}] \quad (3.7)$$

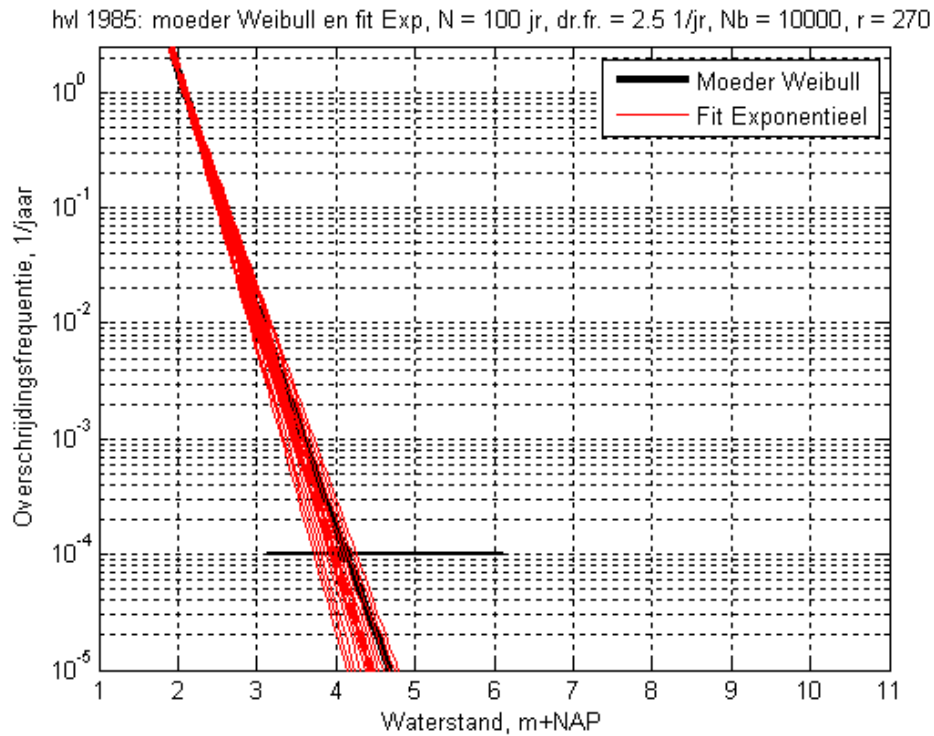
Dit interval is smaller dan dat voor de omnidirectionele verdeling uit (3.3), wat niet verwonderlijk is, omdat het  $10^{-4}$ -kwantiel in dit geval ook lager is (circa 0.9 m lager).

**Moeder Weibull (270°); fit exponentieel**

Voor de exponentiële verdeling als fit staan de resultaten Figuur 3-8. Het 95%-BI blijkt in dit geval:

$$[3.72 \text{ m+NAP}, 4.26 \text{ m+NAP}] = [3.98 - 0.26 \text{ m+NAP}, 3.98 + 0.26 \text{ m+NAP}] \quad (3.8)$$

Dit interval is, net als voor de omnidirectionele verdeling, weer heel erg smal.



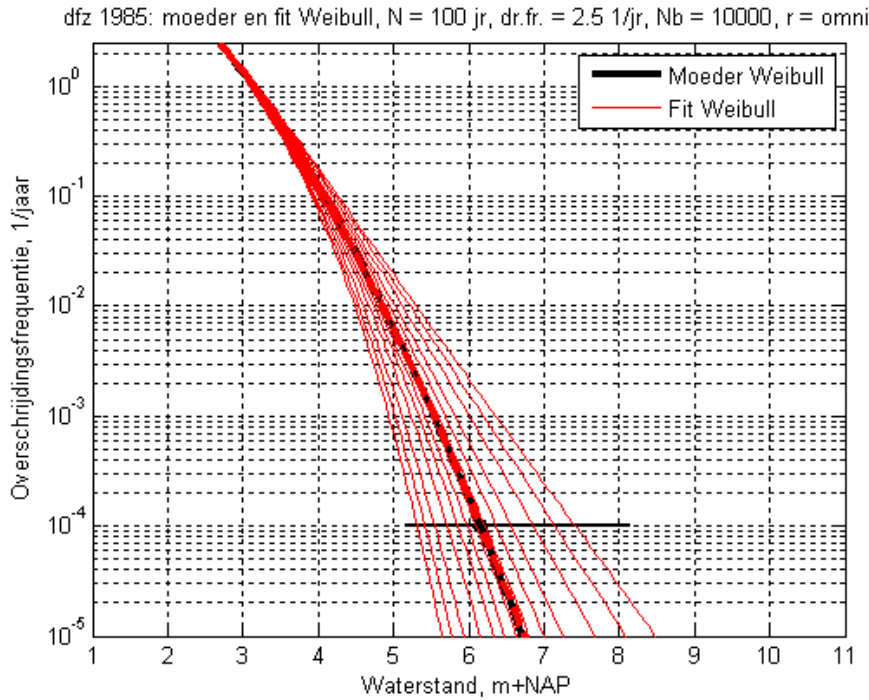
Figuur 3-8 Moederverdeling: Weibull; fit: exponentieel. Hoek van Holland (270°).

## 3.4 Delfzijl omnidirectioneel

### 3.4.1 Moederverdeling Weibull en meerdere fitverdelingen

#### Moeder Weibull; fit Weibull

De resultaten voor moederverdeling Weibull-omni en fitverdeling Weibull staan in Figuur 3-9.<sup>3</sup>



Figuur 3-9 Moederverdeling: Weibull; fit: Weibull. Delfzijl (omni).

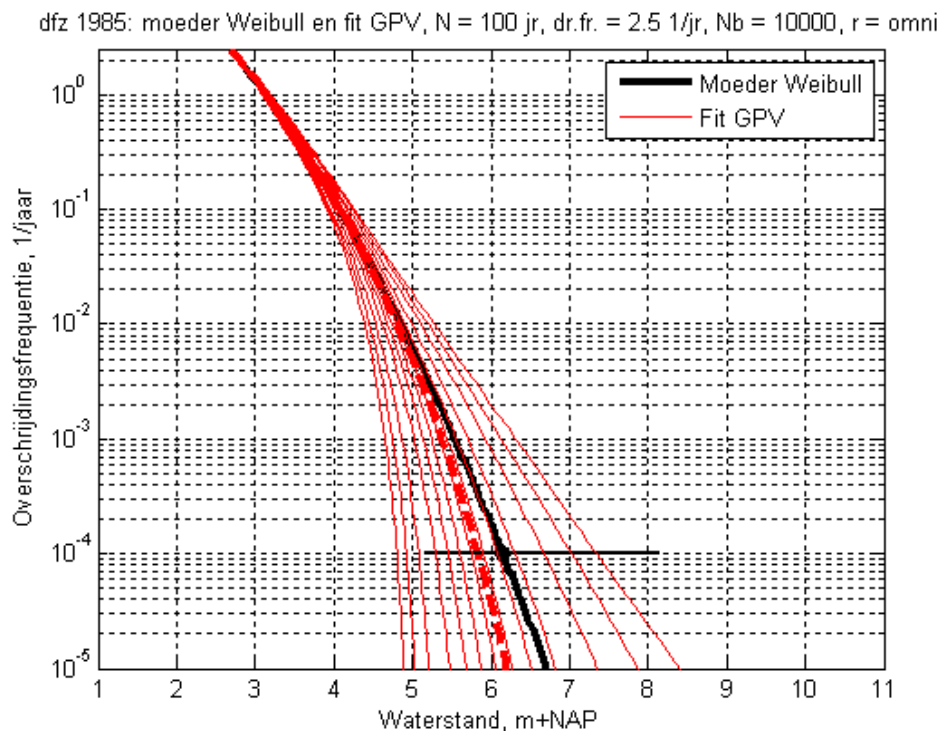
Het 95%-BI voor het 10<sup>-4</sup>-kwantiel is

$$[5.31 \text{ m+NAP}, 7.41 \text{ m+NAP}] = [6.16 - 0.85 \text{ m+NAP}, 6.16 + 1.25 \text{ m+NAP}] \quad (3.9)$$

<sup>3</sup> Door de kromming naar beneden van de moederverdeling, kost de numerieke bepaling van ML-schatters nu veel minder rekentijd dan voor Hoek van Holland (met kromming naar boven). Vandaar dat hier de standaardwaarde  $N_b = 10000$  is genomen.

### Moeder Weibull; fit GPV

Bij dezelfde moederverdeling (Weibull) kan als fitverdeling ook de GPV worden beschouwd. De resultaten daarvoor staan in Figuur 3-10.



Figuur 3-10 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Delfzijl (omni).

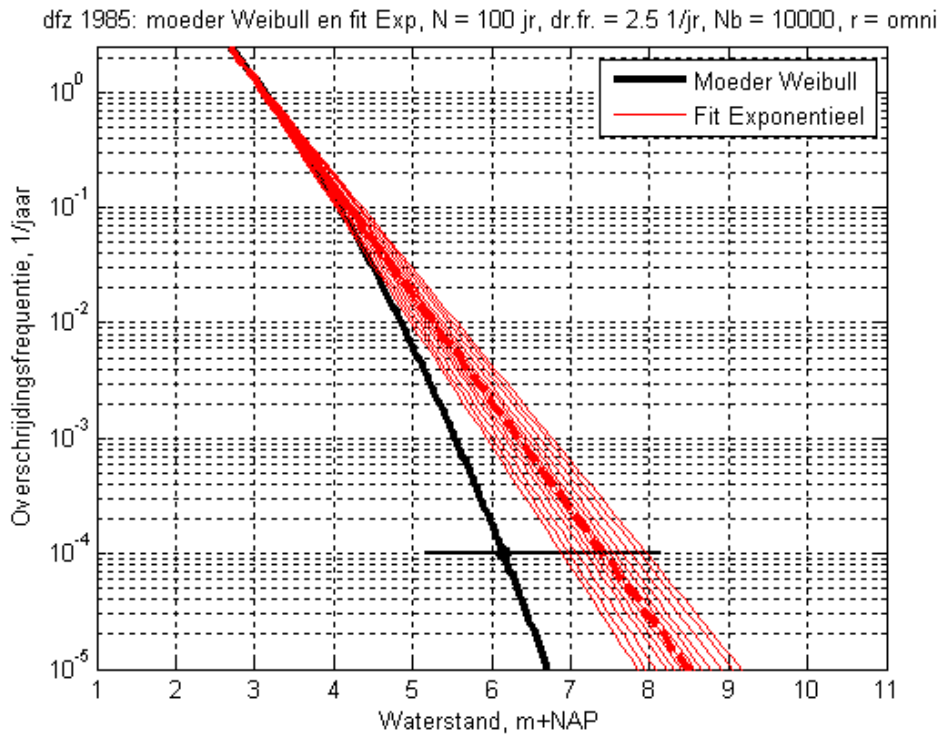
Het 95%-BI blijkt in dit geval:

$$[4.80 \text{ m+NAP}, 7.35 \text{ m+NAP}] = [5.83 - 1.03 \text{ m+NAP}, 5.83 + 1.51 \text{ m+NAP}] \quad (3.10)$$

Dit interval is veel smaller dan dat voor de omnidirectionele verdeling voor Hoek van Holland, vergelijk met (3.3). De reden daarvan is dat Delfzijl een kromming 'naar beneden' heeft, terwijl Hoek van Holland een kromming 'naar boven' heeft. Of een dergelijke versmalling van het BI t.o.v. Hoek van Holland fysisch reëel is, kan op basis van statistische analyses helaas niet worden onderzocht.

### Moeder Weibull; fit exponentieel

Bij dezelfde moederverdeling (Weibull) kan als fitverdeling ook de exponentiële worden beschouwd. De resultaten daarvoor staan in Figuur 3-11. Net als voor Hoek van Holland, vergelijk met Figuur 3-3, kan de exponentiële verdeling feitelijk niet worden toegepast op een moederverdeling met kromming. Het is ook niet zinnig om het 95%-BI hier te vermelden.

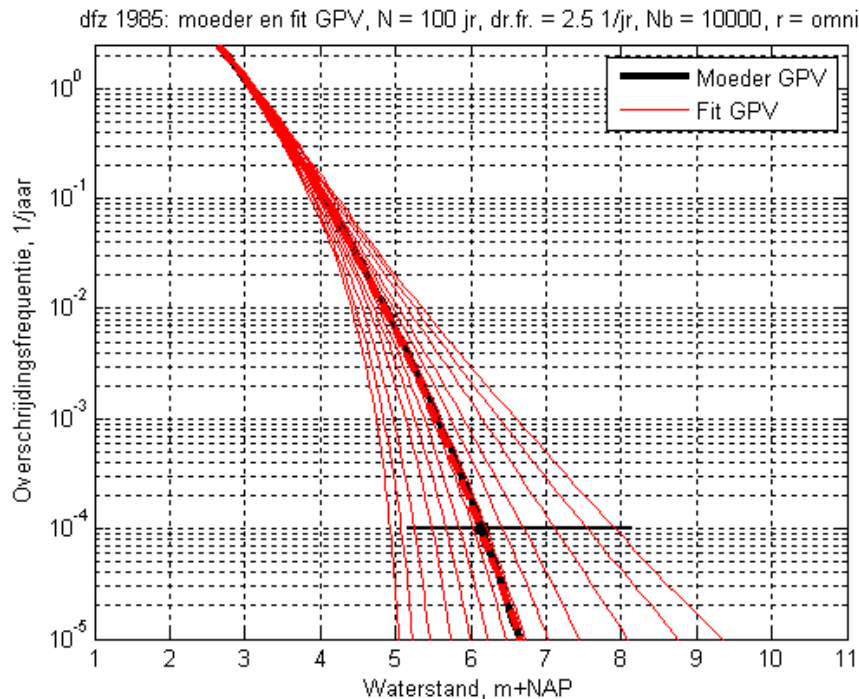


Figuur 3-11 Moederverdeling: Weibull; fit: exponentieel. Delfzijl (omni).



### 3.4.2 Moederverdeling en fit GPV

Nu wordt als moederverdeling de GPV gekozen, waaraan een GPV wordt gefit. De resultaten daarvoor staan in Figuur 3-12.



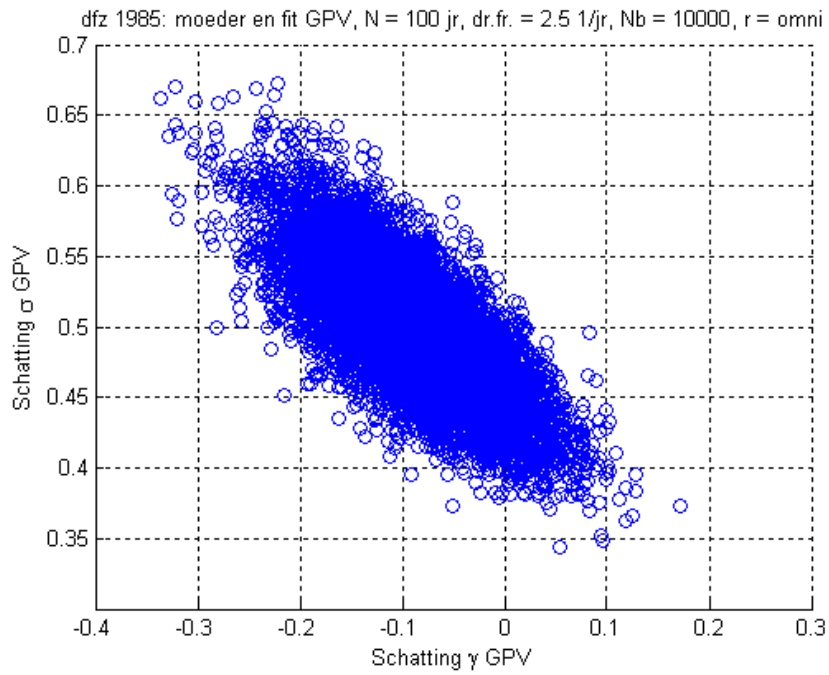
Figuur 3-12 Moederverdeling: GPV; fit: GPV. Delfzijl (omni).

Het 95%-BI blijkt in dit geval:

$$[4.93 \text{ m+NAP}, 7.92 \text{ m+NAP}] = [6.13 - 1.20 \text{ m+NAP}, 6.13 + 1.79 \text{ m+NAP}] \quad (3.11)$$

Dit BI is wat breder dan gevonden voor de GPV-fit met de Weibull als moederverdeling (zie (3.10)). Bovendien is de bias, die in in Figuur 3-10 aanzienlijk was, nu praktisch afwezig. Dat in dit geval de bias minder is, is niet verwonderlijk. Nu wordt immers eenzelfde type verdeling gefit als de moederverdeling (beiden GPV), zodat de fit 'prima in staat is' de moederverdeling te volgen.

Het verband tussen de schaalparameter  $\sigma$  en de vormparameter  $\gamma$  is te zien in Figuur 3-13. Het blijkt, net als voor Hoek van Holland, dat er een duidelijk verband bestaat tussen deze parameters: hogere waarden voor  $\gamma$  gaan samen met lagere waarden voor  $\sigma$ .

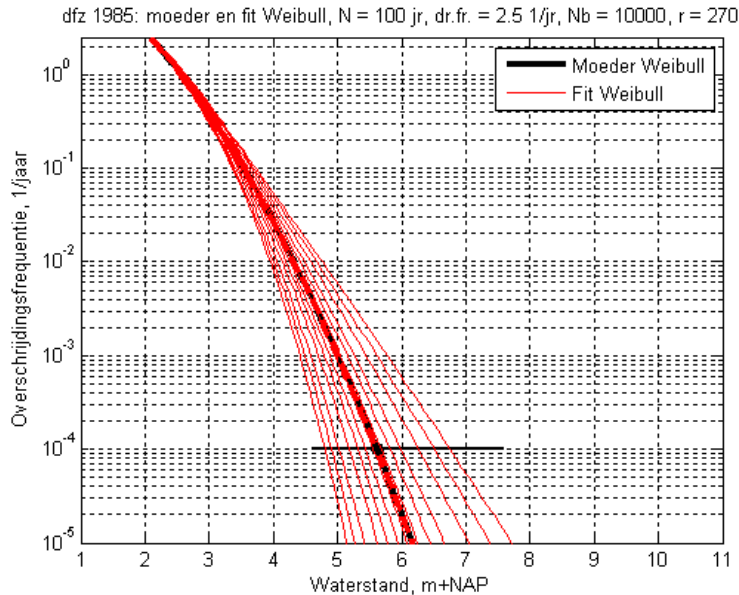


Figuur 3-13 Moederverdeling: GPV; fit: GPV: verband tussen schaal- en vormparameter uit de gefitte verdelingen. Delfzijl (omni).

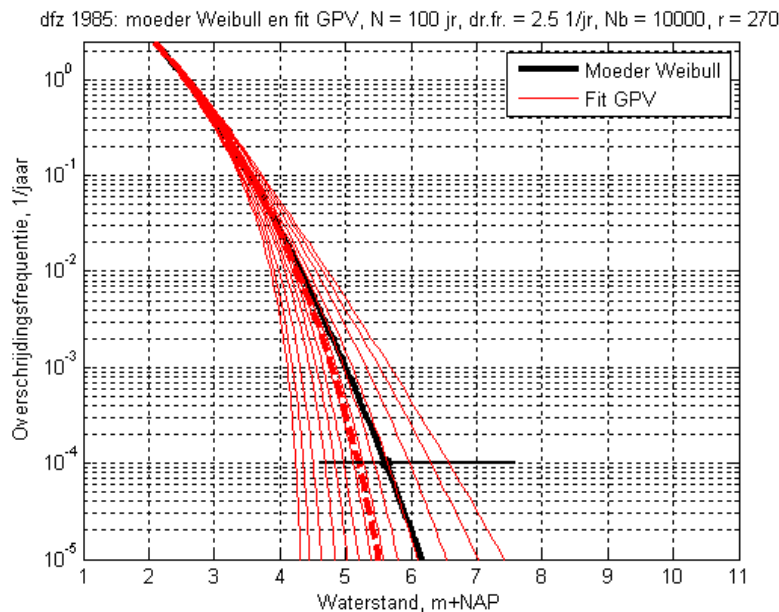
## 3.5 Delfzijl richting 270°

### 3.5.1 Moederverdeling Weibull en meerdere fitverdelingen

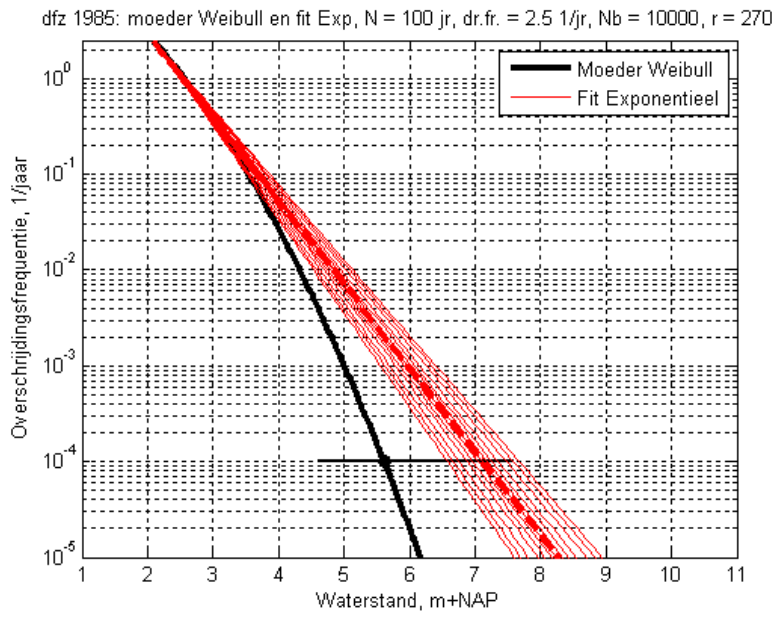
Voor Delfzijl, richting 270°, kunnen soortgelijke figuren worden gemaakt als hiervoor. Deze figuren spreken tamelijk voor zich, en worden hier zonder commentaar gegeven.



Figuur 3-14 Moederverdeling: Weibull; fit: Weibull. Delfzijl (270°).



Figuur 3-15 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Delfzijl (270°).



Figuur 3-16 Moederverdeling: Weibull; fit: exponentieel. Delfzijl (270°).

## 3.6 Invloed meetperiode

### 3.6.1 Effect meetperiode Hoek van Holland omnidirectioneel

In deze paragraaf wordt onderzocht hoe de lengte van de meetperiode van invloed is op de BI's. N.B. Deze meetperiode, die geen relatie hoeft te hebben met de werkelijke metingen, betreft hier de periode waaruit de trekkingen worden verricht. De moederverdeling is steeds de omnidirectionele verdeling voor Hoek van Holland, met fitverdeling GPV. Beschouwd worden meetperiodes met  $N = 50, 100, 130$  en  $500$  jaar. De resultaten staan in Figuur 3-17 t/m Figuur 3-20. N.B. Ter vergelijking zijn de resultaten voor meetperiode  $100$  jaar, die al eerder werden gegeven in Figuur 3-2, hier opnieuw weergegeven.

De conclusie is duidelijk. De keuze van de meetperiode heeft bijzonder veel invloed op de resultaten. Voor  $N = 50$  jaar resulteert een uitzonderlijk breed 95%-BI, dat loopt van circa  $3.3 \text{ m+NAP}$  tot  $9.0 \text{ m+NAP}$ . Het is de vraag of een dergelijke bovengrens fysisch gezien mogelijk is, terwijl de ondergrens te laag lijkt. Sowieso beschikken we in werkelijkheid over meer dan  $50$  jaar metingen. In de basispeilen is voor Hoek van Holland immers een meetreeks gebruikt van circa  $100$  jaar.

*Inmiddels zijn circa 30 meetjaren extra beschikbaar gekomen, waarvan bekend is dat ze voor Hoek van Holland 'geen grote extremen' bevatten. Het is daarom interessant om te zien hoeveel het BI verandert als 130 jaar als meetlengte wordt gebruikt.*

Figuur 3-19 laat zien dat het 95%-BI dan, zoals verwacht, wat smaller wordt dan voor meetlengte  $100$  jaar, maar de versmalling blijft redelijk beperkt. Ter vergelijking, voor  $N = 100$  jaar werd een BI gevonden van, zie (3.3),

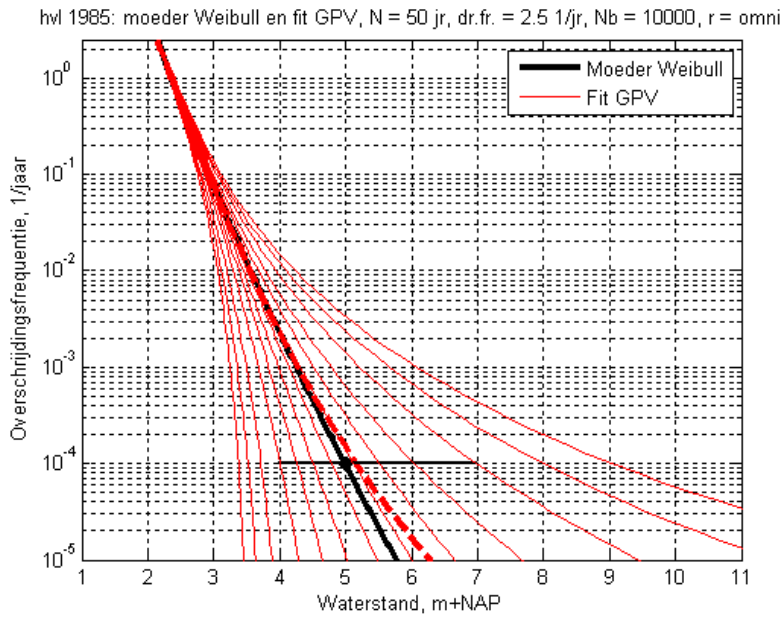
$$[3.73 \text{ m+NAP}, 7.46 \text{ m+NAP}] = [5.09 - 1.36 \text{ m+NAP}, 5.09 + 2.37 \text{ m+NAP}] \quad (3.12)$$

Dit interval heeft een breedte van  $7.46 - 3.73 = 3.73 \text{ m}$ . Voor  $N = 130$  jaar loopt het interval van  $3.85 \text{ m+NAP}$  tot  $7.09 \text{ m+NAP}$ , met een breedte van  $3.24 \text{ m}$ ; de breedte neemt dus af met circa  $0.5 \text{ m}$  (14% smaller).

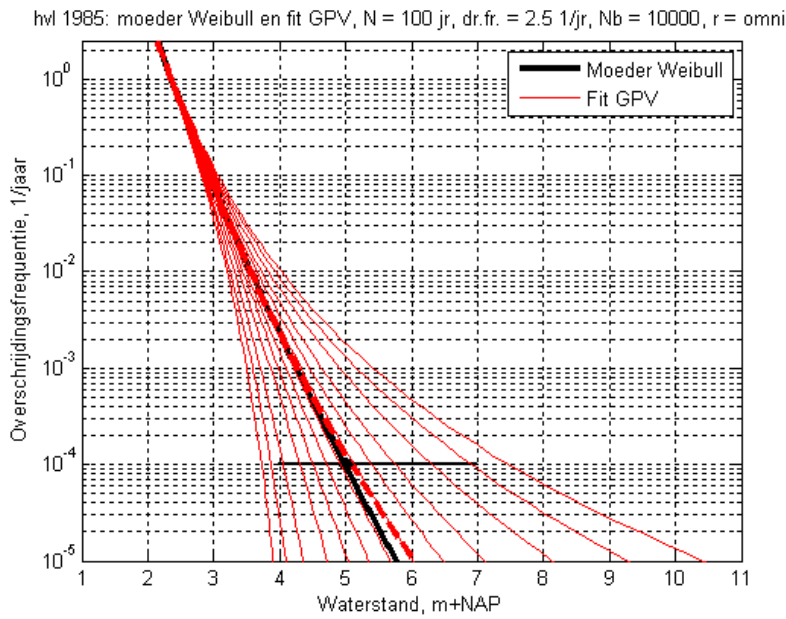
Als gevoeligheidsanalyse is ook een meetlengte van  $500$  jaar onderzocht (Figuur 3-20). In dat geval wordt het 95%-BI aanmerkelijk smaller, met grenzen

$$[4.36 \text{ m+NAP}, 5.87 \text{ m+NAP}] = [5.04 - 0.68 \text{ m+NAP}, 5.04 + 0.84 \text{ m+NAP}] \quad (3.13)$$

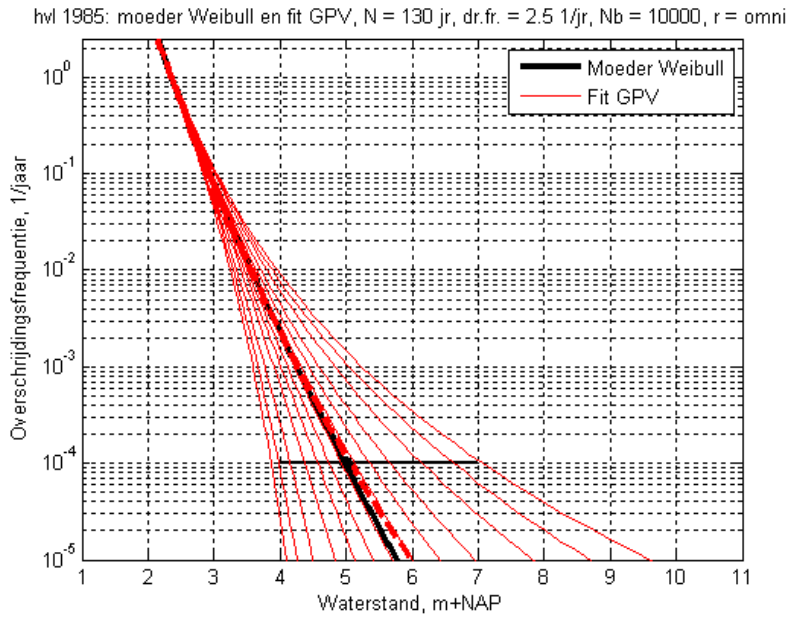
Helaas beschikken we niet over  $500$  meetjaren. In de volgende paragraaf wordt een andere keuze uit de bootstraphmethode beschouwd, de keuze voor de drempelfrequentie van de trekkingen.



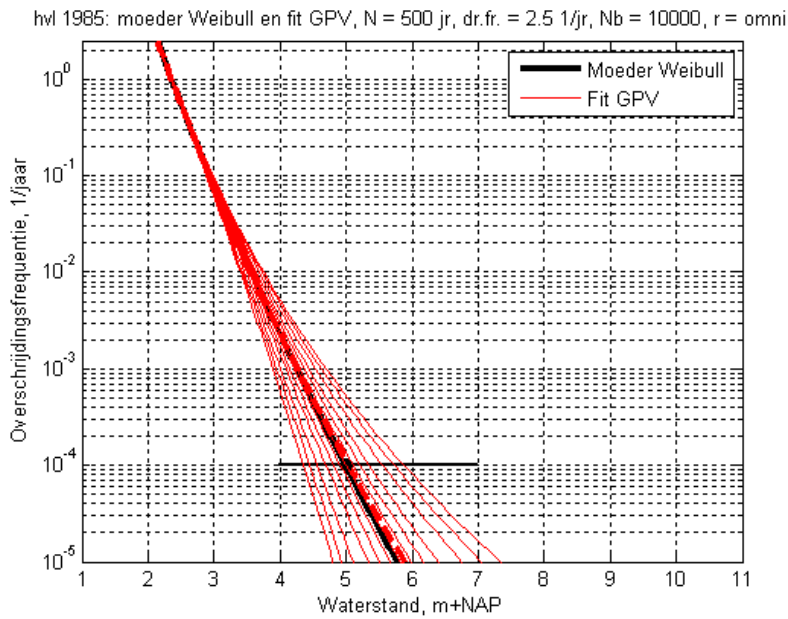
Figuur 3-17 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Hoek van Holland (omni). Meetperiode  $N = 50$  jaar.



Figuur 3-18 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Hoek van Holland (omni). Meetperiode  $N = 100$  jaar (referentiesituatie uit Figuur 3-2).



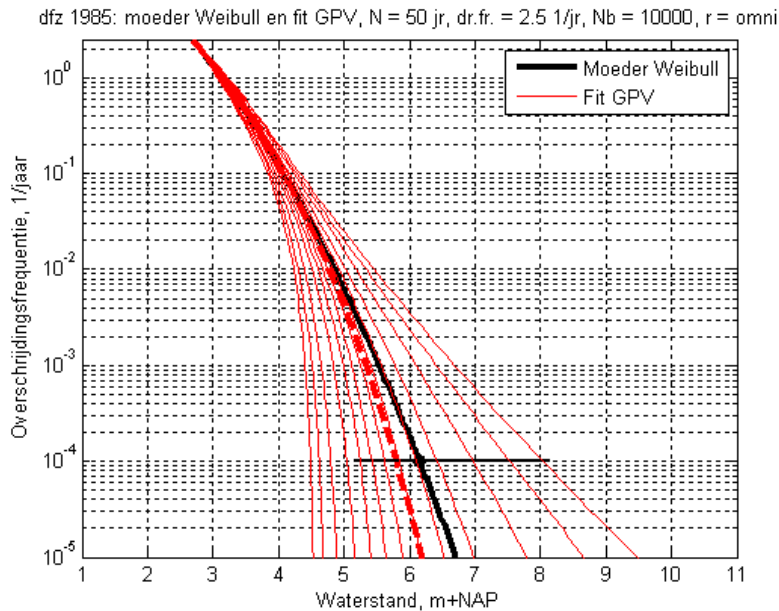
Figuur 3-19 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Hoek van Holland (omni). Meetperiode  $N = 130$  jaar.



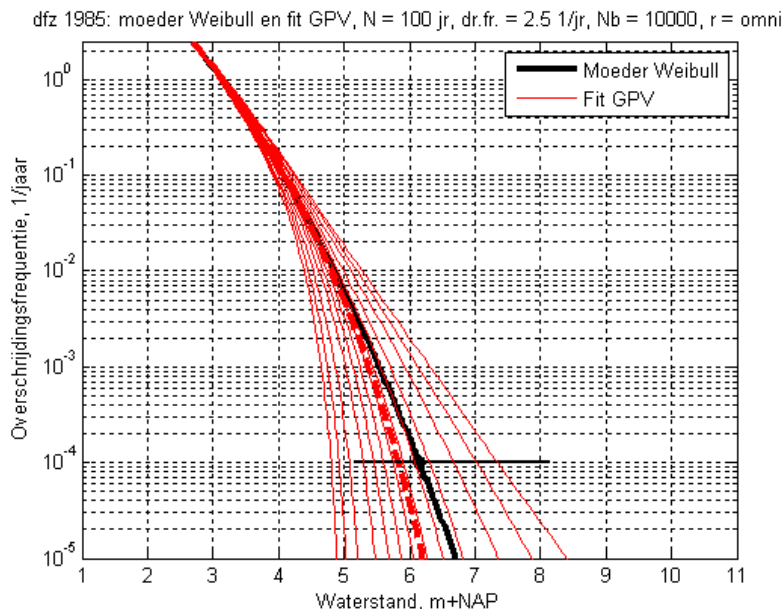
Figuur 3-20 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Hoek van Holland (omni). Meetperiode  $N = 500$  jaar.

### 3.6.2 Effect meetperiode Delfzijl omnidirectioneel

Net als voor Hoek van Holland kan het effect van de beschouwde meetperiode worden onderzocht voor Delfzijl (omnidirectioneel). De figuren staan hieronder. Ze behoeven weinig commentaar. We noemen slechts dat de BI's wat smaller zijn dan die voor Hoek van Holland uit 3.6.1, vanwege de al eerder genoemde 'kromming naar beneden', die bij Hoek van Holland juist naar boven is gericht.<sup>4</sup>



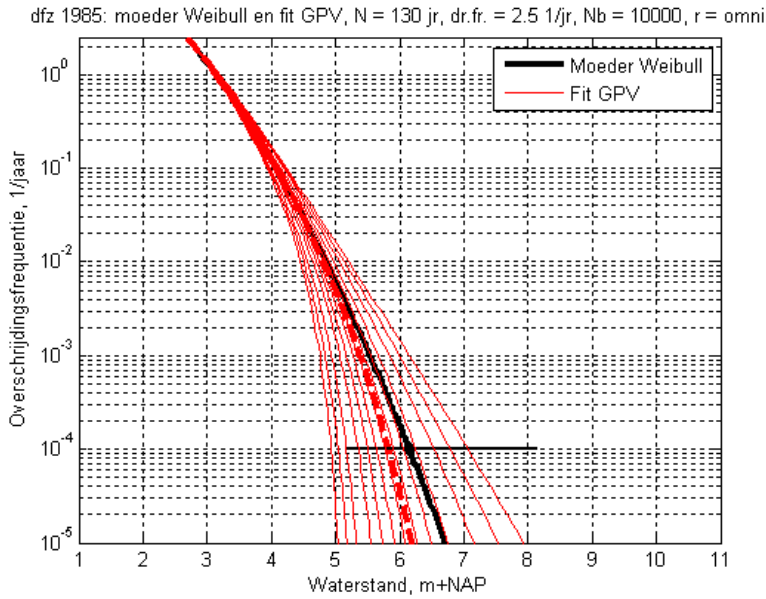
Figuur 3-21 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Delfzijl (omni). Meetperiode  $N = 50$  jaar.



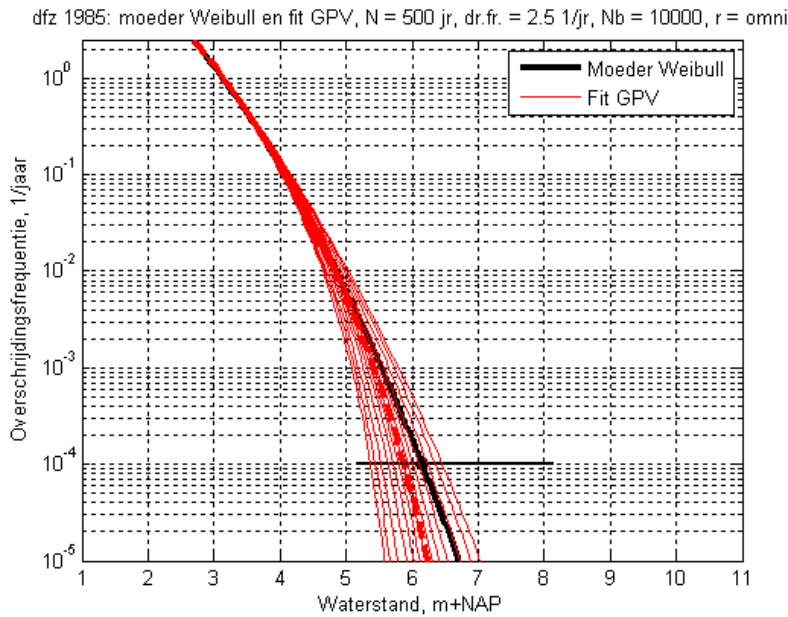
Figuur 3-22 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Delfzijl (omni). Meetperiode  $N = 100$  jaar (referentiesituatie uit Figuur 3-10).

<sup>4</sup> In Hoofdstuk 8 van [Philippart et al, 1993] wordt ingegaan op mogelijke fysische oorzaken van het verschil in kromming tussen de kuststations, waarbij het zogenaamde Waddeneffect wordt besproken. Dergelijke beschouwingen vallen echter buiten de scope van dit rapport.





Figuur 3-23 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Delfzijl (omni). Meetperiode N = 130 jaar.

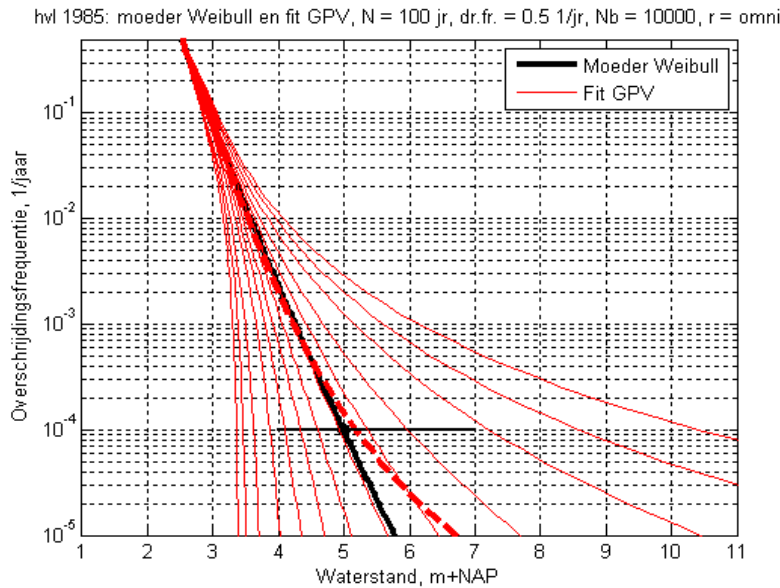


Figuur 3-24 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Delfzijl (omni). Meetperiode N = 500 jaar.

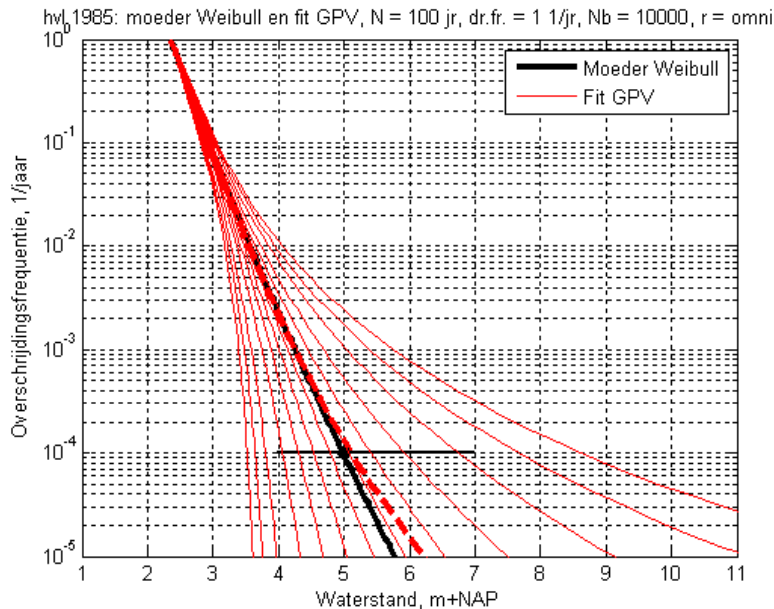
## 3.7 Invloed drempelwaarde

### 3.7.1 Effect drempelwaarde Hoek van Holland omnidirectioneel

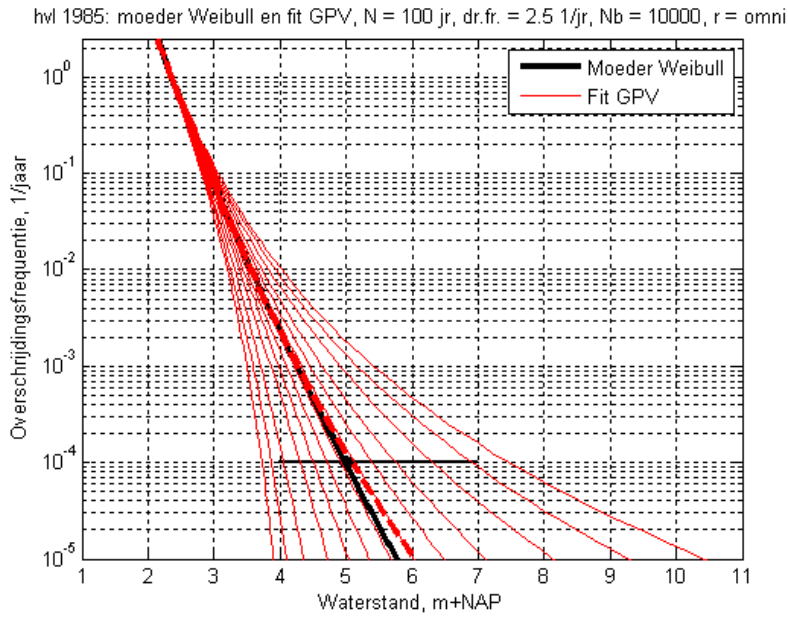
In deze paragraaf wordt onderzocht hoe de BI's afhangen van de gekozen drempelfrequentie voor de trekkingen. Onderzocht worden, naast de referentiewaarde 2.5 per jaar, de keuzes 0.5, 1 en 5 keer per jaar.



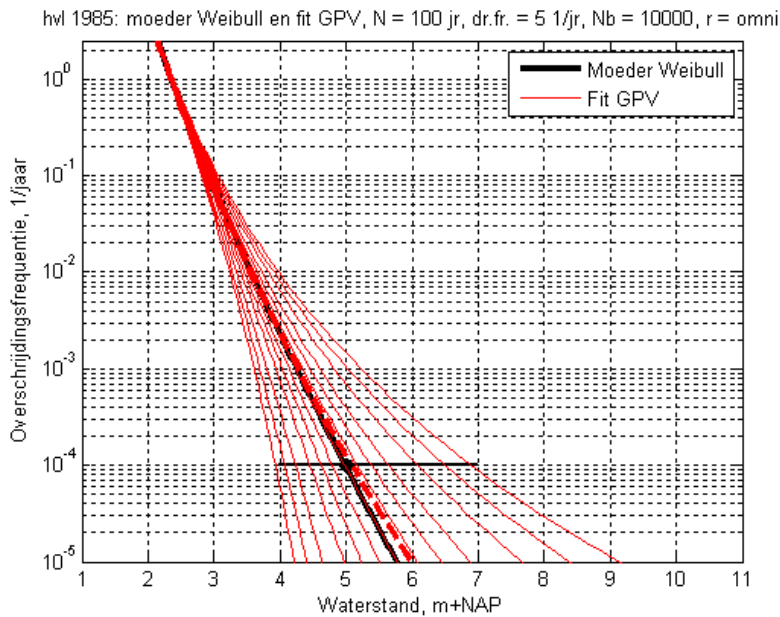
Figuur 3-25 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Hoek van Holland (omni). Drempelfrequentie 0.5 per jaar.



Figuur 3-26 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Hoek van Holland (omni). Drempelfrequentie 1 per jaar.



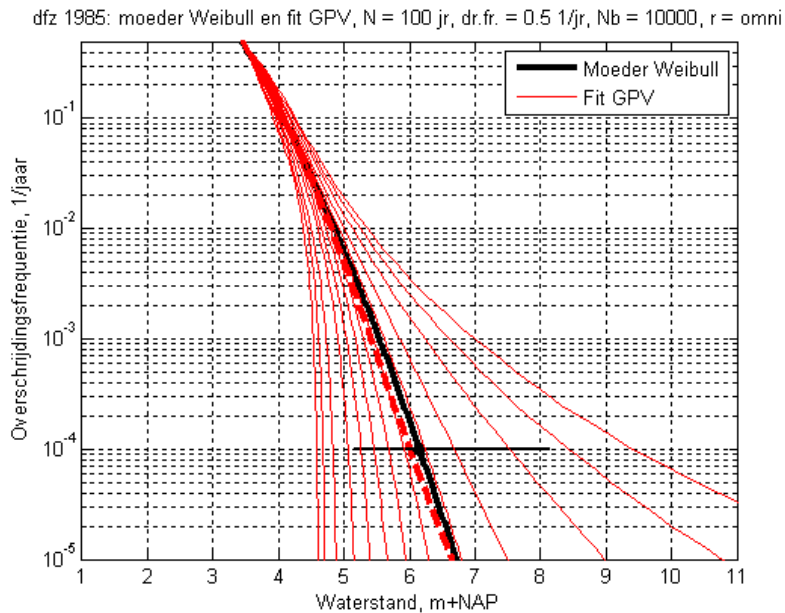
*Figuur 3-27 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Hoek van Holland (omni). Drempelfrequentie 2.5 per jaar (referentiesituatie uit Figuur 3-2).*



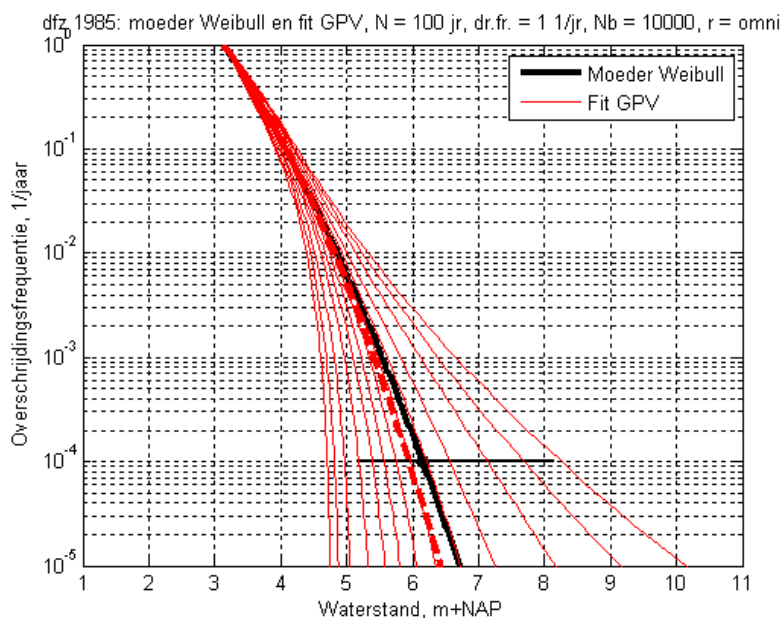
*Figuur 3-28 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Hoek van Holland (omni). Drempelfrequentie 5 per jaar.*

### 3.7.2 Effect drempelwaarde Delfzijl omnidirectioneel

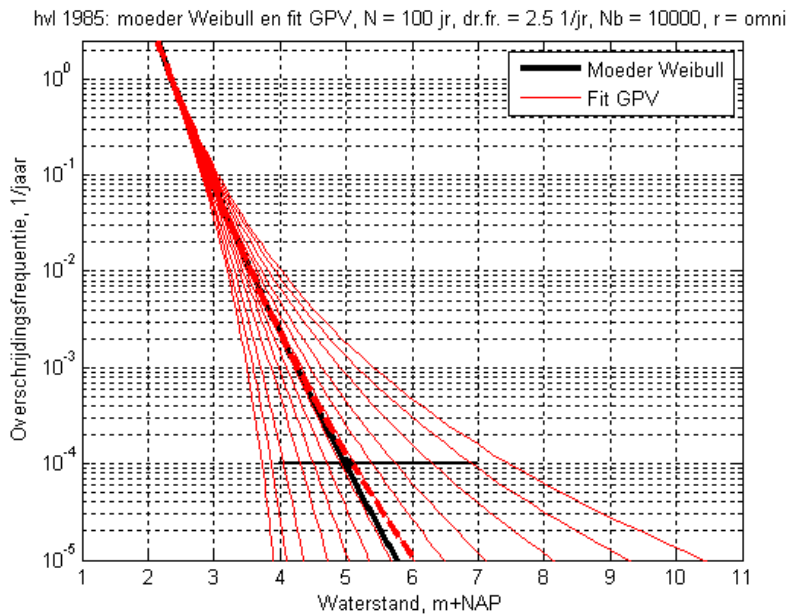
Net als voor Hoek van Holland kan het effect van de beschouwde drempelwaarde worden onderzocht voor Delfzijl (omnidirectioneel). De figuren staan hieronder. Ze behoeven weinig commentaar. We noemen slechts dat de BI's wat smaller zijn dan die voor Hoek van Holland uit paragraaf 3.7.1, vanwege de eerder genoemde 'kromming naar beneden', die bij Hoek van Holland juist naar boven is gericht.



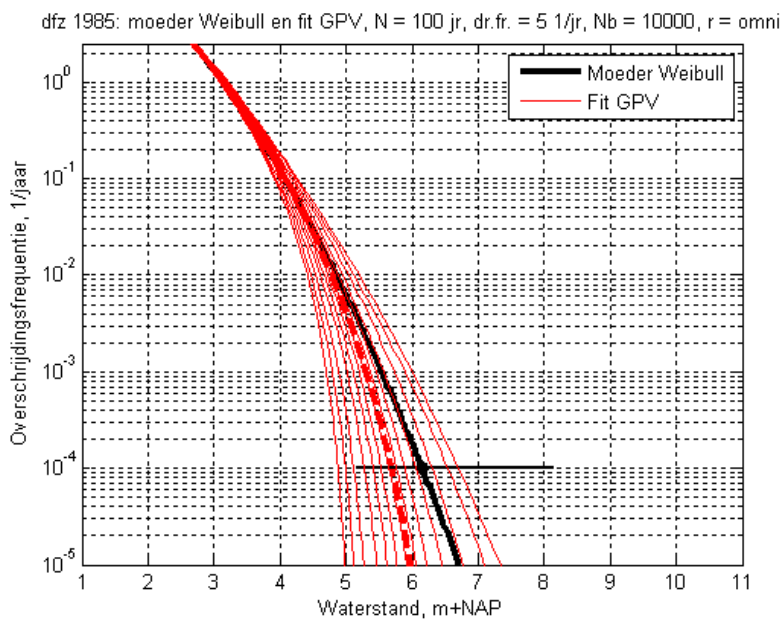
Figuur 3-29 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Delfzijl (omni). Drempelfrequentie 0.5 per jaar.



Figuur 3-30 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Delfzijl (omni). Drempelfrequentie 1 per jaar.



*Figuur 3-31 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV.Delfzijl (omni). Drempelfrequentie 2.5 per jaar (referentiesituatie uit Figuur 3-2).*



*Figuur 3-32 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV.Delfzijl (omni). Drempelfrequentie 5 per jaar.*

## 3.8 Conclusies en verdere aanpak

### 3.8.1 Conclusies

Hiervoor zijn diverse analyses verricht. Duidelijk is dat de breedte van het 95%-BI sterk wordt bepaald door allerlei uitgangspunten. Verwonderlijk is dat niet. In de literatuur wordt over de schatting van (extreme) kwantilen, waar het BI informatie over geeft, hetzelfde gesteld. In bijvoorbeeld het boek [Embrechts et al, 1999] wordt hierover in paragraaf 6.5.2 gezegd:<sup>5</sup>

"...estimates for the  $p$ -quantiles  $x_p$  for every  $p \in (0,1)$  can be given. The statistical reliability of these estimates becomes, as we have seen, very difficult to judge in general. Though we can work out approximate confidence intervals for these estimators, such constructions strongly rely on mathematical assumptions which are unverifiable in practice."

Er is derhalve niet één zaligmakende manier om BI's af te leiden.

Op basis van de bevindingen voor de bootstrapmethode uit de voorgaande paragrafen worden de volgende conclusies getrokken:

1. Bij het fitten van een verdeling is vaak sprake van een bias, in de zin dat (bijvoorbeeld) het  $10^{-4}$ -kwantiel van de moederverdeling (gemiddeld gezien) door de gefitte verdelingen niet wordt gereproduceerd. Ondanks deze bias kan echter wel worden gezien wat de breedte is van het 95%-BI voor het  $10^{-4}$ -kwantiel.
2. Het 95%-BI wordt in hoge mate bepaald door het type fitverdeling:
  - a. De GPV geeft een relatief breed interval.
  - b. De Weibullverdeling geeft een vrij smal interval.
  - c. De exponentiële geeft een zeer smal interval.
3. De keuze van de meetperiode voor de moederverdeling heeft grote invloed op de resultaten. Dit is onderzocht met de GPV als fitverdeling, voor meetperiodes 50, 100 (referentie), 130 en 500 jaar. Voor het  $10^{-4}$ -kwantiel volgt:
  - a. Een meetperiode van 50 jaar levert een onwaarschijnlijk breed 95%-BI, met voor Hoek van Holland een bovengrens van 9 m+NAP.
  - b. Een meetperiode van 130 jaar levert een iets smaller 95%-BI dan de (referentie)meetperiode van 100 jaar, maar de afname in breedte blijft beperkt (voor Hoek van Holland 14% smaller 95%-BI dan voor de referentie).
  - c. Een (fictieve) meetperiode van 500 jaar levert een aanzienlijk smaller 95%-BI. Voor Hoek van Holland is het 95%-BI dan 40% smaller dan het 95%-BI voor de referentiemeetperiode van 100 jaar.
4. Ook de keuze van de drempelfrequentie voor de moederverdeling heeft grote invloed op de resultaten. Dit is onderzocht met de GPV als fitverdeling, voor drempelfrequenties 0.5, 1, 2.5 (referentie) en 5 per jaar. Voor het  $10^{-4}$ -kwantiel volgt:
  - a. Een drempelfrequentie van 0.5 per jaar levert een onwaarschijnlijk breed 95%-BI, met voor Hoek van Holland een bovengrens van ruim 10 m+NAP.

<sup>5</sup> Dit boek gaat ook in op de methodes die door Laurens de Haan, één van de auteurs van [Dillingh et al, 1993ab ], zijn opgesteld.

- b. Ook een drempelfrequentie van 1 per jaar levert een erg breed 95%-BI, met voor Hoek van Holland een bovengrens van circa 8.5 m+NAP.
- c. Een drempelfrequentie van 5 per jaar levert een wat smaller 95%-BI. Voor Hoek van Holland is het 95%-BI dan 20% smaller dan het 95%-BI voor de referentiesituatie.

Deze bevindingen leiden niet tot een duidelijk beeld over een methode voor het bepalen van BI's. Onze (subjectieve) mening is dat de onzekerheid bij keuze van de fitverdelingen Weibull en exponentieel wordt onderschat, met name door de exponentiële verdeling. Onze voorkeur gaat uit naar de onzekerheid zoals die volgt uit de GPV als fitverdeling. Dat betreft ook een 'officiële' limietverdeling uit de extreme waarden theorie. Wat de drempelkeuze betreft wordt aangesloten bij de keuze 2.5 per jaar als drempelfrequentie, wat overeen stemt met de aanpak uit de basispeilen voor Hoek van Holland (zie paragraaf 2.2.2).

### **3.8.2 Aanpak voor bepalen BI's**

Hiervoor is voor Hoek van Holland en Delfzijl de invloed in beeld gebracht van allerlei aannames op de aard van de BI's. In het volgende hoofdstuk wordt een aanpak beschreven om voor elk kuststation een BI te genereren. Die aanpak wordt beschreven voor de kuststations, maar voor de meren kan vrijwel dezelfde aanpak worden gevolgd (zie daarover hoofdstuk 6).





## 4 Methode om BI's te bepalen voor kuststations

Dit hoofdstuk behandelt een methode om BI's te bepalen voor kuststations. Kern van de methode is dat eerst BI's worden bepaald voor een *exponentiële* moederverdeling, door daaraan een klasse van GPV's te fitten met de bootstraphmethode. Daarna wordt een transformatie gebruikt om deze BI's – die dus horen bij een exponentiële (moeder)verdeling – om te vormen tot BI's die horen bij de Weibullverdelingen voor de kust.

Het uiteindelijke resultaat van de methode is dat per station BI's kunnen worden bepaald door gebruik te maken van een normale kansdichtheid  $w(\gamma)$  met parameters  $\mu_w$  en  $\sigma_w$ , in combinatie met de Weibullparameters van dat station. De parameters  $\mu_w$  en  $\sigma_w$  zijn stationsafhankelijk, maar wel gelijk voor de directionele en omnidirectionele Weibulls van dat station. De normale kansdichtheid  $w(\gamma)$  heeft betrekking op de vormparameter  $\gamma$  van een bepaalde klasse van GPV's.

De aanpak is wiskundig enigszins gecompliceerd, vandaar dat eerst een globale beschrijving van de aanpak wordt gegeven, met figuren als toelichting (paragraaf 4.1). Dan volgen de details van de methode (paragraaf 4.2 t/m 4.5). De laatste paragraaf van het hoofdstuk geeft o.m. per station de parameters  $\mu_w$  en  $\sigma_w$  en overwegingen bij de gemaakte keuzes (paragraaf 4.6).

### 4.1 Globale beschrijving van de aanpak

Het doel van dit project is betrouwbaarheidsintervallen (BI's) te bepalen voor kwantilen van de overschrijdingsfrequentie van de zeewaterstand, voor acht basisstations, voor omnidirectionele en directionele verdelingen. De frequentieverdelingen van de zeewaterstand zijn conditionele Weibullverdelingen van de vorm:

$$F(M > m) = f(\theta)P(M > m) \quad (4.1)$$

met

$$f(\theta) = \text{overschrijdingsfrequentie van drempelwaarde } \theta \quad (4.2)$$

en

$$P(M > m) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{\sigma}\right)^\alpha + \left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\alpha\right\}, \quad m \geq \theta \quad (4.3)$$

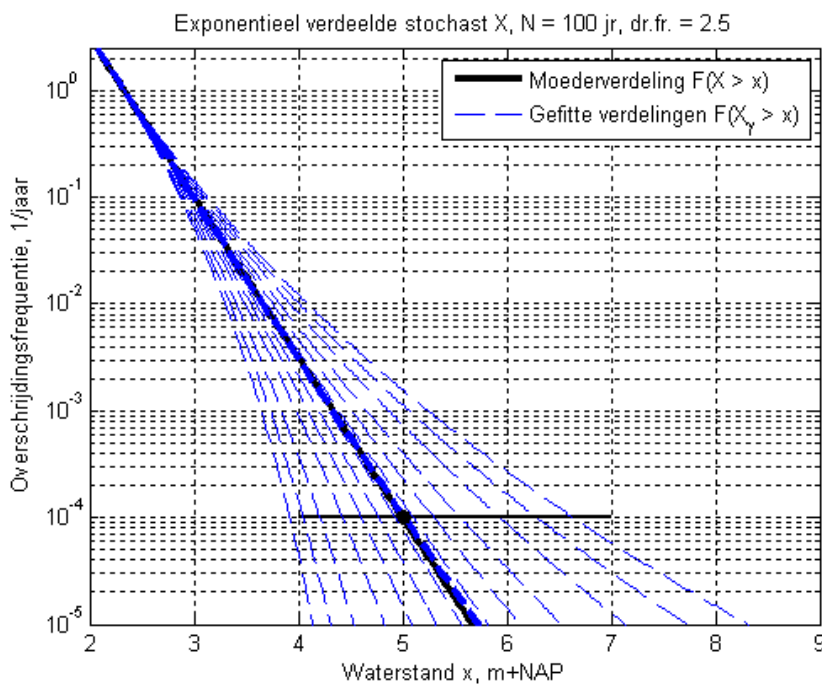
De volgende aanpak wordt gevolgd:

1. Eerst wordt een methode beschouwd om BI's te bepalen voor de exponentiële frequentieverdeling  $F(X > x)$ , welke een speciaal geval vormt van de Weibullverdeling (neem dan  $\alpha = 1$ ). De BI's voor de kwantilen worden gevonden door met de eerder beschouwde bootstraphmethode frequentieverdelingen  $F(X_\gamma > x)$  op basis van de GPV te fitten, waarbij in dit geval deze GPV's worden geparametriseerd *door slechts één continue parameter*.
2. Het doel is BI's te bepalen voor kwantilen van de Weibulls uit (4.1). Daartoe wordt de verdeling van  $X$  op een bepaalde manier getransformeerd, op zo'n manier dat de verdeling

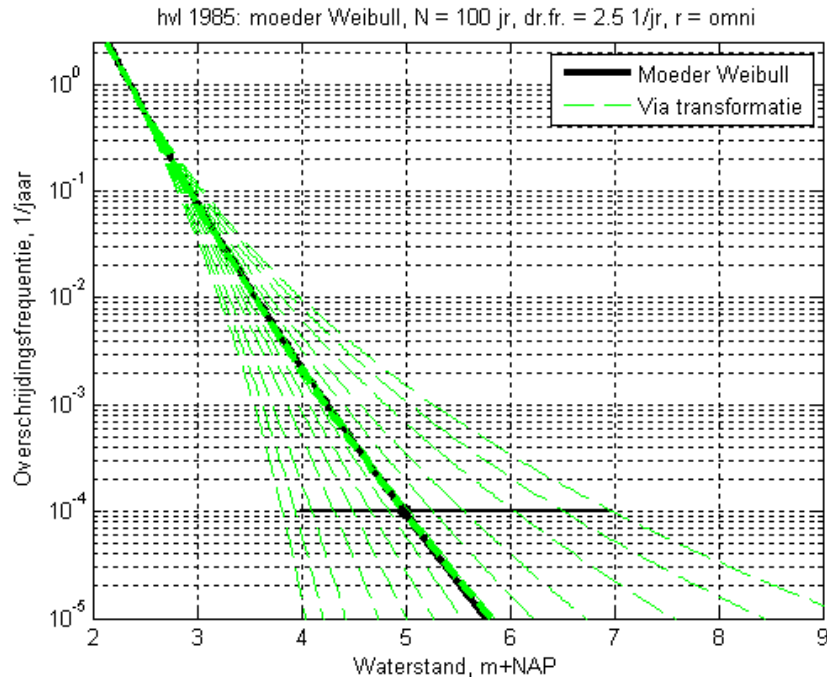
van  $X$  overgaat in de gewenste Weibullverdeling van  $M$ . Door deze transformatie wordt tevens aan iedere realisatie  $x$  een realisatie  $m$  toegevoegd, en vice versa.

De details van de methode worden in de volgende paragrafen uitgelegd. Hier volgt eerst een illustratie van de methode aan de hand van enkele figuren, zodat de lezer een idee krijgt van de aard van de methode.

Figuur 4-1 geeft de lijnen met grenzen van BI's voor een exponentiële frequentieverdeling. De blauwe lijnen uit deze figuur hebben eenzelfde interpretatie als de rode lijnen uit de figuren uit hoofdstuk 3; ze zijn nu blauw weergegeven, om duidelijk te maken dat de moederverdeling de exponentiële is. In dit geval is de verdeling van  $X$  zo gekozen dat die min of meer de omnidirectionele statistiek van Hoek van Holland representeert. Verderop zal blijken (paragraaf 4.3.3) dat de BI's voor de Weibulls uit punt 2 niet afhankelijk van de keuze van de verdeling van  $X$ : iedere exponentiële frequentieverdeling voor  $X$  levert dezelfde BI's voor de frequentieverdelingen voor  $M$ ; de verschillen in de verdeling van  $X$  vallen namelijk weg in de transformatie van  $X$  naar  $M$ .



Figuur 4-1 Bepalen van BI's op basis van exponentiële frequentieverdeling  $F(X > x)$ .



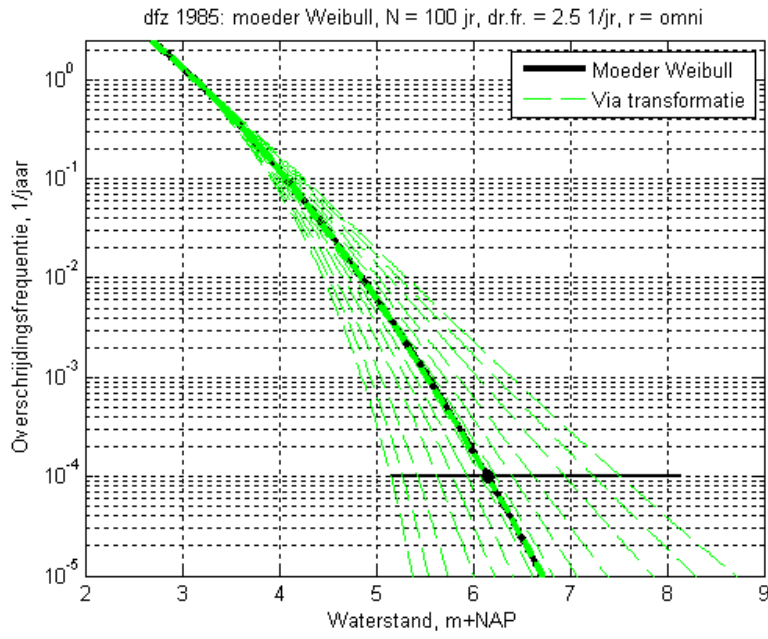
Figuur 4-2 Blauwe lijnen uit Figuur 4-1, maar dan getransformeerd naar de omnidirectionele  $F(M>m)$  voor Hoek van Holland.

De genoemde transformatie van  $X$  naar  $M$  – waaronder realisaties  $x$  overgaan in realisaties  $m$  – voert de exponentiële moederverdeling  $F(X>x)$  over in een beschouwde (moeder) Weibullverdeling  $F(M>m)$ .

Voor de omnidirectionele verdelingen van Hoek van Holland en Delfzijl is het resultaat weergegeven in Figuur 4-2 en Figuur 4-3. Voor bijvoorbeeld het  $10^{-4}$ -kwantiel voor Hoek van Holland is te zien dat de lijnen naar boven toe verder uitwaaiëren dan voor de exponentiële verdeling: in Figuur 4-2 ligt de bovengrens ongeveer 1.65 m boven het  $10^{-4}$ -kwantiel van de moederverdeling, terwijl de bovengrens in Figuur 4-1 ongeveer 2.0 m boven het  $10^{-4}$ -kwantiel ligt. De oorzaak voor deze 'verbreding' is dat de (werkelijke) verdeling voor Hoek van Holland een kromming naar boven toe heeft, wat zoals eerder geconstateerd in hoofdstuk 3, een verbreding van het BI tot gevolg heeft.

De verdeling voor Delfzijl heeft een kromming naar beneden toe, wat een 'versmalling' van de BI's tot gevolg heeft, zoals te zien in Figuur 4-3.

In het vervolg worden de details van de methode behandeld.



Figuur 4-3 Blauwe lijnen uit Figuur 4-1, maar dan getransformeerd naar de omnidirectionele  $F(M>m)$  voor Delfzijl.

## 4.2 Model voor onzekerheid bij exponentiële moederverdeling

### 4.2.1 Exponentiële verdeling en GPV's voor modelleren onzekerheid

Beschouw een exponentiële frequentieverdeling van de vorm

$$F(X > x) = f(\theta_0)P(X > x) \quad (4.4)$$

met

$$f(\theta_0) = \text{overschrijdingsfrequentie van drempelwaarde } \theta_0 \quad (4.5)$$

en

$$P(X > x) = \exp\left\{-\frac{x-\theta_0}{\sigma_0}\right\}, \quad x \geq \theta_0 \quad (4.6)$$

Als 'onzekerheidsmodel' voor  $P(X > x)$  wordt een klasse van **G**eneraliseerde **P**areto **V**erdelingen (GPV's) genomen van de volgende vorm:

$$P(X_\gamma > x) = \begin{cases} \left\{1 + \gamma \left(\frac{x-\theta_0}{\sigma_0}\right)\right\}^{-\frac{1}{\gamma}}, & \gamma \neq 0 \\ \exp\left(-\frac{(x-\theta_0)}{\sigma_0}\right), & \gamma = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

waarbij voldaan moet zijn aan de voorwaarden:

$$x \geq \theta_0 \quad \text{en} \quad 1 + \gamma \left(\frac{x-\theta_0}{\sigma_0}\right) > 0 \quad (4.8)$$

Merk op dat de parameters  $\theta_0$  en  $\sigma_0$  hier vast zijn gekozen, en overeenstemmen met die uit (4.6). Alleen de zogenaamde vormparameter  $\gamma$  wordt hier als variabele beschouwd. Voor de bijbehorende overschrijdingsfrequentie volgt dan:

$$F(X_\gamma > x) = f(\theta_0)P(X_\gamma > x) \quad (4.9)$$

De hiervoor getoonde Figuur 4-1 is bepaald door de bootstrapmethode uit hoofdstuk 3 toe te passen op de exponentiële moederverdeling uit (4.4), door daar vervolgens frequentieverdelingen van de vorm (4.9) aan te fitten; zie voor details van de fitmethode paragraaf 4.2.3.

Nu wordt toegelicht waarom (behalve de drempelwaarde  $\theta_0$ ) ook de parameter  $\sigma_0$  als vast is aangenomen. Beschouw daartoe eerst de afgeleide van (4.9) naar  $x$ , voor  $\gamma \neq 0$ :

$$\frac{dF(X_\gamma > x)}{dx} = -\frac{f(\theta_0)}{\sigma_0} \left\{1 + \gamma \left(\frac{x-\theta_0}{\sigma_0}\right)\right\}^{-\frac{1}{\gamma}-1} \quad (4.10)$$

waaruit blijkt:

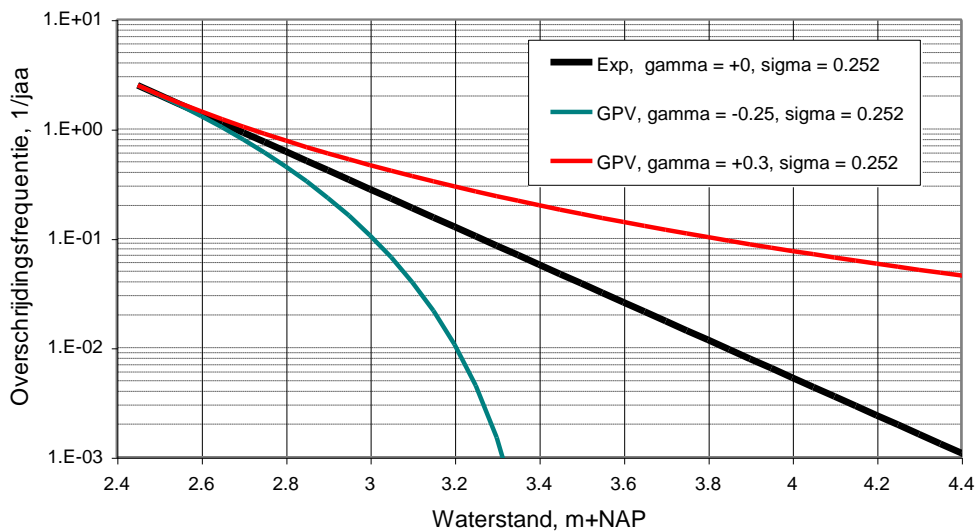
$$\left. \frac{dF(X_\gamma > x)}{dx} \right|_{x=\theta_0} = -\frac{f(\theta_0)}{\sigma_0}, \quad \gamma \neq 0 \quad (4.11)$$

Deze waarde hangt niet af van  $\gamma$ . I.h.b. is deze waarde gelijk aan de afgeleide naar  $x$  van de exponentiële overschrijdingsfrequentie uit (4.4):

$$\left. \frac{dF(X > x)}{dx} \right|_{x=\theta_0} = -\frac{f(\theta_0)}{\sigma_0} \quad (4.12)$$

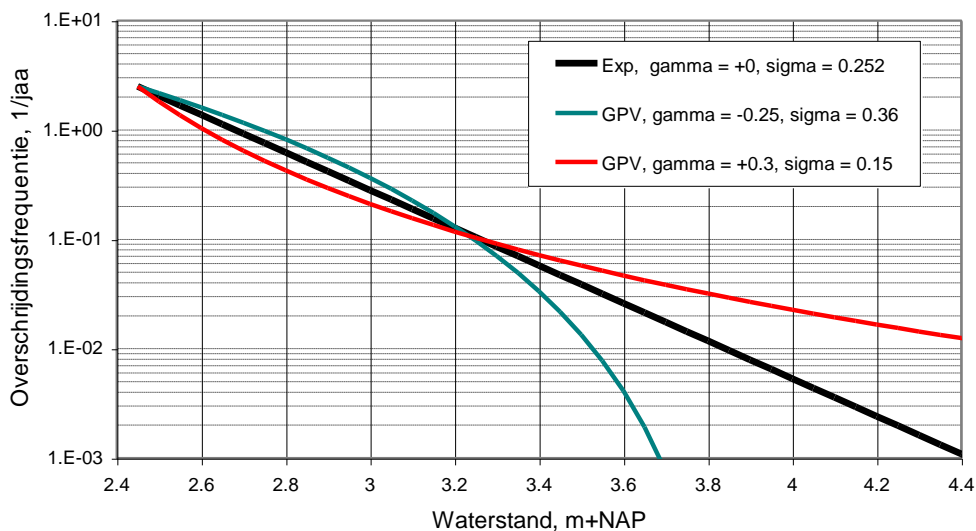
Door een vaste  $\sigma = \sigma_0$  te beschouwen in (4.9) en (4.7), wordt dus bereikt dat alle  $F(X_\gamma > x)$  dezelfde afgeleide hebben in het punt  $x = \theta_0$ . Zie als toelichting Figuur 4-4. Direct boven de drempel is hier nauwelijks sprake van onzekerheid: alle verdelingen  $X_\gamma$  'lijken daar op de moederverdeling'.

Exponentiële verdeling en 2 GPV's; vaste sigma



Figuur 4-4: Verband tussen de exponentiële frequentieverdeling en twee GPV's. De waarde voor  $\sigma$  stemt voor alle verdelingen overeen.

Exponentiële verdeling en 2 GPV's; verschillende sigma's



Figuur 4-5: Verband tussen de exponentiële frequentieverdeling en twee GPV's. Hier hebben de GPV's waarden voor  $\sigma$  die verschillen van die uit de exponentiële verdeling.

Als ook andere waarden voor  $\sigma$  zouden worden beschouwd, ontstaat de situatie uit Figuur 4-5. In de hier weergegeven situatie, waarin de mate van onzekerheid overigens sterk is overdreven, is er direct boven de drempel wel sprake van onzekerheid. In onze aanpak, met

een vaste  $\sigma_0$ , wordt derhalve geen onzekerheid direct boven de drempel beschouwd. Bij drempels die relatief vaak worden overschreden – zeg vaker dan eens per jaar bij een meetperiode van 50 jaar of langer – lijkt dat redelijk, omdat direct boven de drempel nog weinig onzekerheid bestaat in de overschrijdingsfrequentie.

De belangrijkste reden om een vaste  $\sigma = \sigma_0$  te beschouwen is echter meer pragmatisch. Als bij het fitten de 'volledige' GPV-verdeling wordt beschouwd, met fitparameters  $\gamma$  en (vrije)  $\sigma$ , bestaat een verband tussen  $\gamma$  en  $\sigma$  zoals te zien in bijvoorbeeld Figuur 3-5. Als een kansverdeling wordt gebruikt voor deze twee fitparameters, moet rekening worden gehouden met de correlatie daartussen. Bij beschouwen van een vaste  $\sigma$  hoeft alleen de kansverdeling voor  $\gamma$  te worden onderzocht. Het blijkt dat met alleen beschouwen van  $\gamma$  een hele range van onzekerheid kan worden beschouwd, waardoor het toevoegen van een vrije  $\sigma$  feitelijk overbodig is.

#### 4.2.2 Definitiegebied van $P(X_\gamma > x)$

Het is nuttig om nu de voorwaarden uit (4.8) nader te bekijken. De eerste voorwaarde  $x \geq \theta_0$  spreekt voor zich.

Wat de tweede voorwaarde betreft is duidelijk dat voor  $\gamma > 0$  daaraan voor iedere  $x \geq \theta_0$  altijd is voldaan. Voor  $\gamma < 0$  heeft de zogenaamde drager van de GPV echter (zoals ook bekend uit de literatuur) een bovengrens en volgt:

$$\theta_0 \leq x < x_r, \quad \text{als } \gamma < 0 \quad (4.13)$$

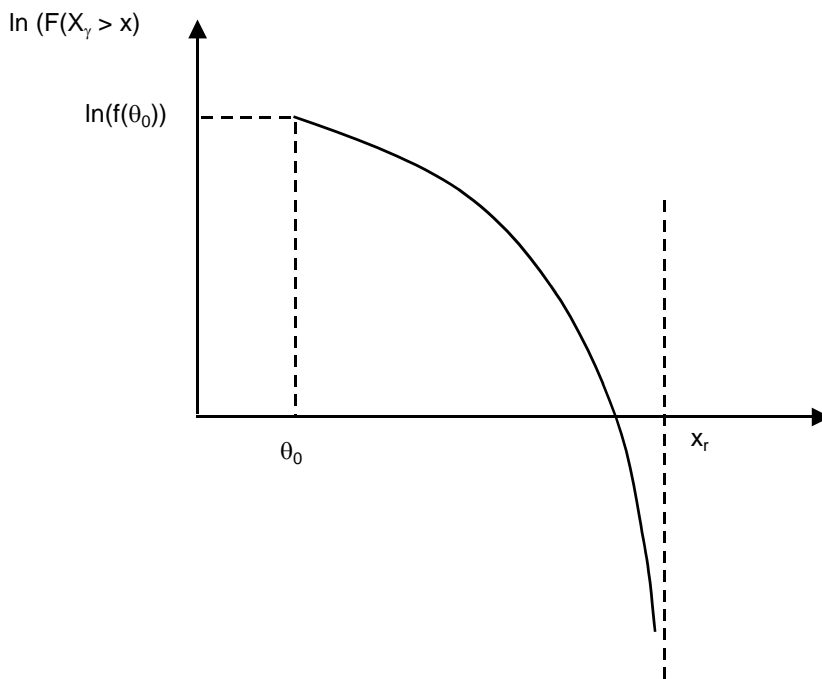
waarbij de rechterbovengrens  $x_r$  van de verdeling wordt gegeven door

$$x_r = \theta_0 - \frac{\sigma_0}{\gamma} = \theta_0 + \frac{\sigma_0}{|\gamma|}, \quad \text{als } \gamma < 0 \quad (4.14)$$

Verder volgt (eveneens bekend uit de literatuur):

$$\begin{aligned} & \lim_{x \uparrow x_r} P(X_\gamma > x) \\ &= \lim_{x \uparrow x_r} \left\{ 1 + \gamma \left( \frac{x - \theta_0}{\sigma_0} \right) \right\}^{-\frac{1}{\gamma}} \\ &= \lim_{x \uparrow x_r} \exp \left\{ -\frac{1}{\gamma} \ln \left[ 1 + \gamma \left( \frac{x - \theta_0}{\sigma_0} \right) \right] \right\} \\ &= \lim_{x \uparrow x_r} \exp \left\{ -\frac{1}{\gamma} \ln \left[ 1 + \gamma \left( \frac{x - x_r - \sigma_0/\gamma}{\sigma_0} \right) \right] \right\} \\ &= \lim_{x \uparrow x_r} \exp \left\{ -\frac{1}{\gamma} \ln \left( \frac{\gamma}{\sigma_0} (x - x_r) \right) \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dus bij de bovengrens van de drager van de verdeling limeert de kans  $P(X_\gamma > x)$  naar 0. Deze situatie is schetsmatig weergegeven in Figuur 4-6, voor de situatie dat de natuurlijke *logaritme* van de overschrijdingskans is uitgezet.



Figuur 4-6: Gedrag van de GPV voor  $\gamma < 0$  (schetsmatig).

### 4.2.3 ML-schatter voor GPV met bekende schaalparameter

Uit de literatuur is het nodige bekend over de ML-schatter voor de schaalparameter  $\sigma$  en de vormparameter  $\gamma$  uit de GPV, bij gegeven vaste drempel  $\theta$ , zie bijvoorbeeld paragraaf 6.5 uit [Embrechts et al, 1999] en [Smith, 1987]. Zo is bekend dat deze schatter 'nette eigenschappen' heeft voor waarden  $\gamma > -1/2$ . Verderop blijkt dat in onze toepassingen  $\gamma$  inderdaad altijd groter is dan  $-1/2$ : veelal blijkt  $\gamma$  groter te zijn dan  $-0.25$ .

Het is overigens in de situatie uit de voorgaande paragraaf niet nodig om twee parameters uit de GPV te schatten, omdat in onze context steeds met een vaste waarde  $\sigma = \sigma_0$  voor de schaalparameter wordt gewerkt, terwijl ook de locatieparameter (drempelwaarde)  $\theta_0$  vast ligt. In plaats van het moeten schatten van de twee paramaters  $\sigma$  en  $\gamma$ , hoeft nu alleen  $\gamma$  geschat te worden. Hieronder volgen de formules voor de ML-schatting van  $\gamma$ .

Neem aan dat voor het schatten van  $\gamma$  uit  $P(X_\gamma > x)$  data  $x_1, \dots, x_n$  beschikbaar zijn. Dit kunnen werkelijke of gesimuleerde data zijn, die onafhankelijk worden aangenomen. De likelihood  $L(\gamma)$  van deze data wordt dan gegeven door:

$$L(\gamma) = \prod_{i=1}^n g(x_i | \gamma) \quad (4.16)$$

met

$$g(x | \gamma) = -\frac{d P(X_\gamma > x)}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_0} \left\{ 1 + \gamma \left( \frac{x - \theta_0}{\sigma_0} \right) \right\}^{-\frac{1}{\gamma} - 1}, & \gamma \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma_0} \exp\left( -\frac{x - \theta_0}{\sigma_0} \right), & \gamma = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$



de kansdichtheid, bij gegeven  $\gamma$ , van de verdeling  $P(X_\gamma > x)$ . Het principe van de ML-schatting is dat de geschatte  $\hat{\gamma}$  wordt gevonden door het maximum op te zoeken van  $L(\gamma)$ , of equivalent hiermee van  $\ln(L(\gamma))$ . Dat kan op numerieke wijze gedaan worden.

Een andere manier om het maximum te bepalen is door te onderzoeken waar de afgeleide van  $L(\gamma)$  of  $\ln(L(\gamma))$  nul wordt. Dat gaat als volgt. Vooral relevant is de situatie  $\gamma \neq 0$ , waarvoor geschreven kan worden:

$$L(\gamma) = \sigma_0^{-n} \prod_{i=1}^n \left\{ 1 + \gamma \left( \frac{x_i - \theta_0}{\sigma_0} \right) \right\}^{-\frac{1}{\gamma}-1} \quad (4.18)$$

en

$$\ln \{L(\gamma)\} = -n \ln(\sigma_0) - (1 + 1/\gamma) \sum_{i=1}^n \ln \left\{ 1 + \gamma \left( \frac{x_i - \theta_0}{\sigma_0} \right) \right\}, \quad \gamma \neq 0 \quad (4.19)$$

Als nu  $y_i$  wordt gedefinieerd als:

$$y_i = \frac{x_i - \theta_0}{\sigma_0} \geq 0 \quad (4.20)$$

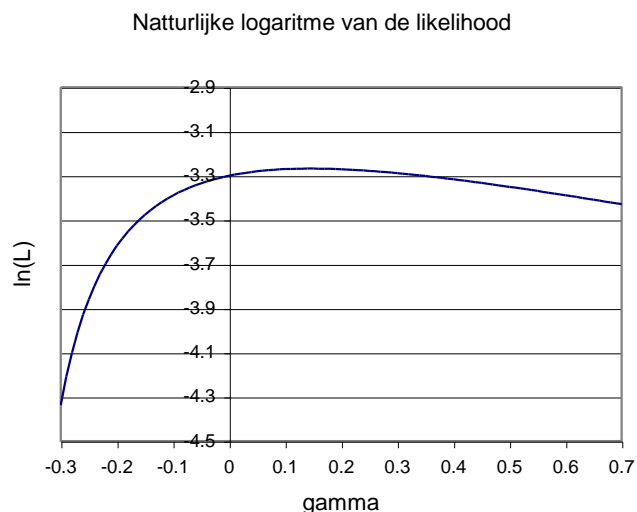
kan eenvoudig worden geverifieerd dat:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \{L(\gamma)\}}{d\gamma} &= -\frac{d}{d\gamma} \left[ (1 + 1/\gamma) \sum_{i=1}^n \ln \{1 + \gamma y_i\} \right], & \gamma \neq 0 \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^n \ln \{1 + \gamma y_i\} - (1 + 1/\gamma) \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{1 + \gamma y_i}, & \gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Om  $\hat{\gamma}$  te vinden dient dan  $\gamma$  te worden opgelost uit de vergelijking:

$$\frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \ln \{1 + \gamma y_i\} - (1 + \gamma) \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{1 + \gamma y_i} = 0, \quad \gamma \neq 0 \quad (4.22)$$

Zie Figuur 4-7 als simpel voorbeeld van het gedrag van  $\ln(L(\gamma))$ . In dit voorbeeld blijkt het maximum te worden bereikt bij  $\hat{\gamma} = 0.131$ .



Figuur 4-7: Illustratie van het gedrag van de likelihood, voor  $n = 2$ , met  $y_1 = 0.6$  en  $y_2 = 2.7$ .

#### 4.2.4 Kansverdeling van $\gamma$ op basis van bootstrapsimulaties

Voor het bepalen van BI's worden trekkingen verricht met de bootstrapmethode uit hoofdstuk 3, met als moederverdeling de exponentiële frequentieverdeling  $F(X > x)$  van de vorm (4.4). Daaraan worden frequentieverdelingen  $F(X_\gamma > x)$  op basis van GPV's gefit van de vorm (4.9). Als bijvoorbeeld  $N = 10^5$  bootstraps worden verricht, resulteert dat in  $N = 10^5$  waarden voor  $\gamma$  (gemakshalve spreken we hier over  $\gamma$  i.p.v.  $\hat{\gamma}$ ). Deze kunnen worden uitgezet in een histogram, zie Figuur 4-8 voor de referentie-metperiode van 100 jaar, en Figuur 4-9 voor de kortere periode van 50 jaar. De kansdichtheid van  $\gamma$  wordt in het vervolg aangeduid als  $w(\gamma)$ . In de figuren zijn meerdere fits voor  $w(\gamma)$  weergegeven, die zometeen worden behandeld.

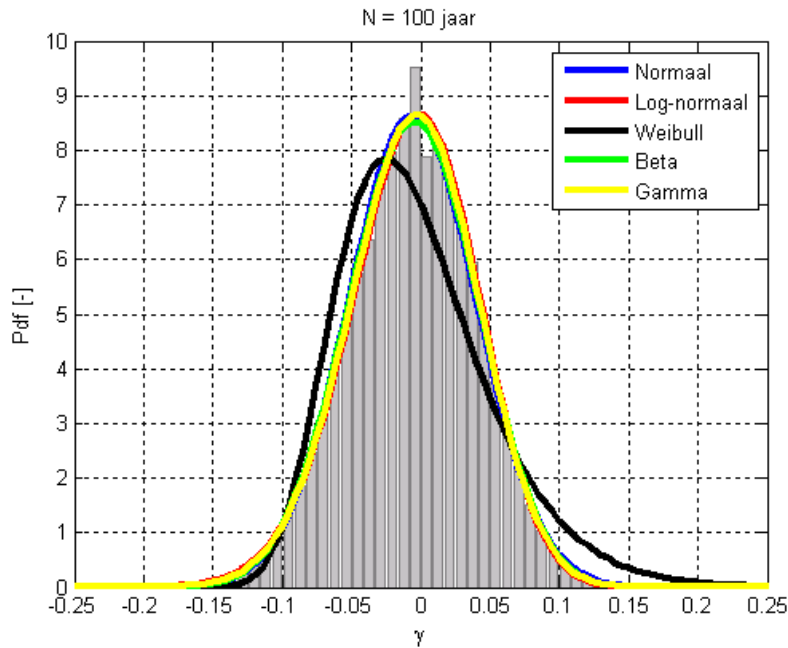
Maar eerst wordt gewezen op het feit dat  $w(\gamma)$  *niet afhangt* van de beschouwde  $\theta_0$  en  $\sigma_0$  uit (4.6). Reden daarvan is dat bij het toepassen van de ML-schatter uit paragraaf 4.2.3 de gevonden waarde voor  $\gamma$  uit een bootstrap alleen afhangt van de (gesimuleerde) data volgens de dimensieloze grootheid  $y_i = (x_i - \theta_0) / \sigma_0$  uit (4.20); verschillende waarden voor  $\theta_0$  en  $\sigma_0$  leiden daarbij tot dezelfde  $y_i$ -waarden.

De kansdichtheid  $w(\gamma)$  blijkt wel af te hangen van de beschouwde meetperiode (wat niet verwonderlijk is). Verder blijkt de verdeling niet geheel symmetrisch te zijn, maar enigszins linksscheef. Dat is het beste te zien voor  $N = 50$  jaar. Voor  $N = 50$  en  $N = 100$  jaar zijn in dit project fits voor  $w(\gamma)$  bepaald, die zijn weergegeven in de figuren. Dat betreft fits op basis van de volgende verdelingen:<sup>6</sup>

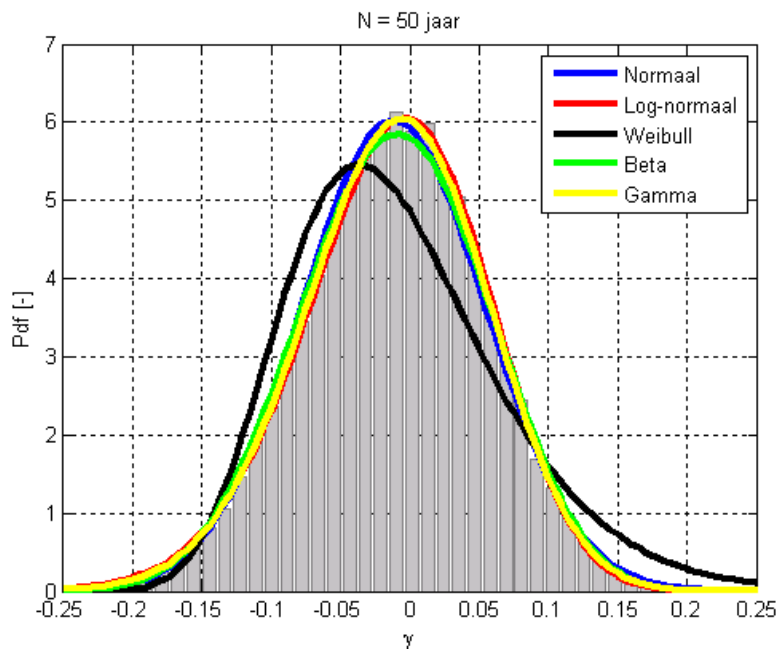
1. Normale verdeling.
2. Lognormale verdeling.
3. Gammaverdeling.
4. Weibullverdeling.
5. Beta-verdeling.
6. Gammaverdeling.

---

<sup>6</sup> Sommige van deze verdelingen zijn in hun standaardvorm rechtsscheef, maar door spiegeling in de verticale as kunnen ze worden omgevormd tot linksscheve verdelingen.



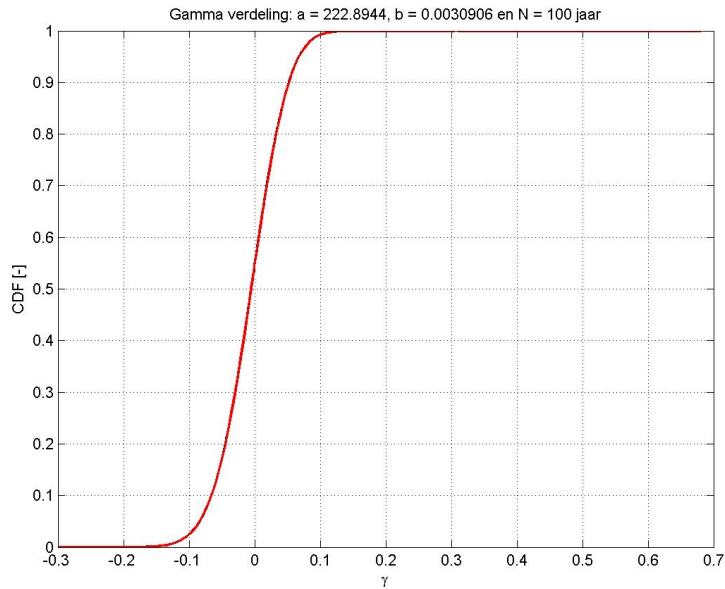
Figuur 4-8 Resultaten voor kansverdeling  $\gamma$ , voor meetperiode  $N = 100$  jaar aan trekkingen,  $N_b = 10^5$  bootstraps.<sup>7</sup>



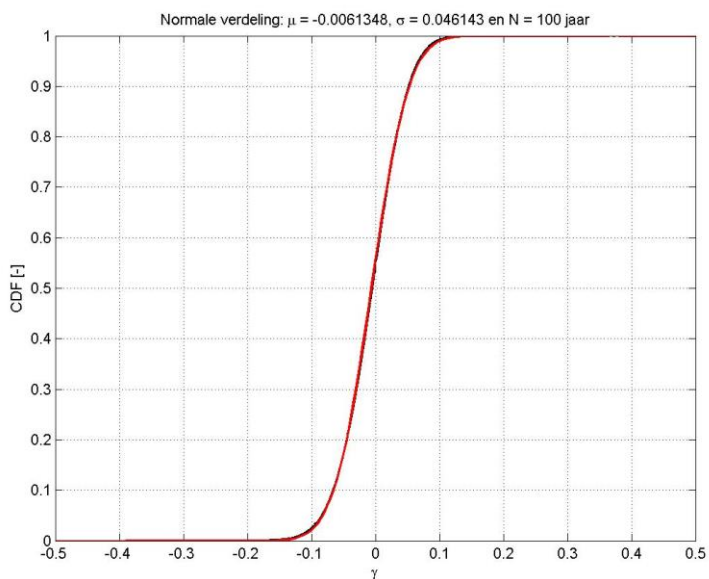
Figuur 4-9 Resultaten voor kansverdeling  $\gamma$ , voor meetperiode  $N = 50$  jaar aan trekkingen,  $N_b = 10^5$  bootstraps.

Het blijkt dat de gammaverdeling het beste fit. De fit volgens de normale verdeling is echter ook vrij goed, zoals blijkt uit Figuur 4-10 en Figuur 4-11. Dat de normale verdeling niet helemaal perfect fit, is eigenlijk alleen te zien als kansen logaritmech worden uitgezet, zoals blijkt uit Figuur 4-12 en Figuur 4-13, waarin onderschrijdingskansen staan.

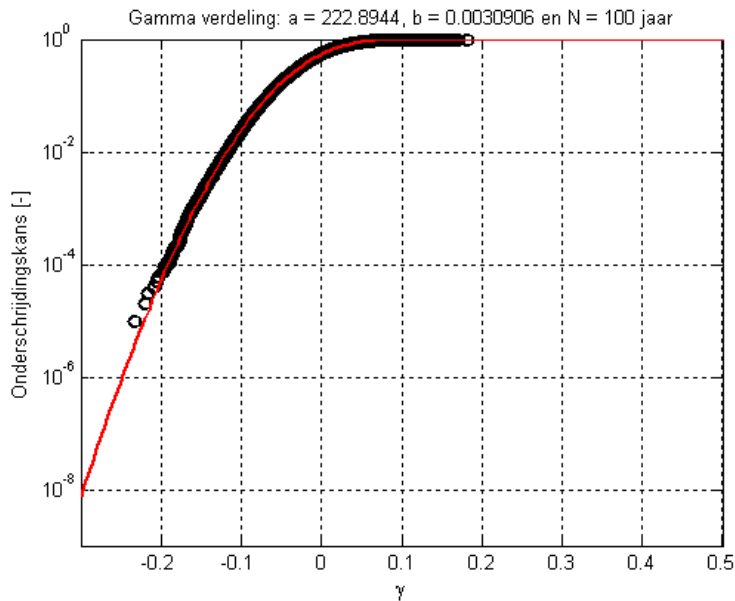
<sup>7</sup> De 'spijker' bij  $\gamma = 0$ , gevolg door het dal daarna, is het gevolg van een numerieke onnauwkeurigheid bij het bepalen van de kansdichtheid.



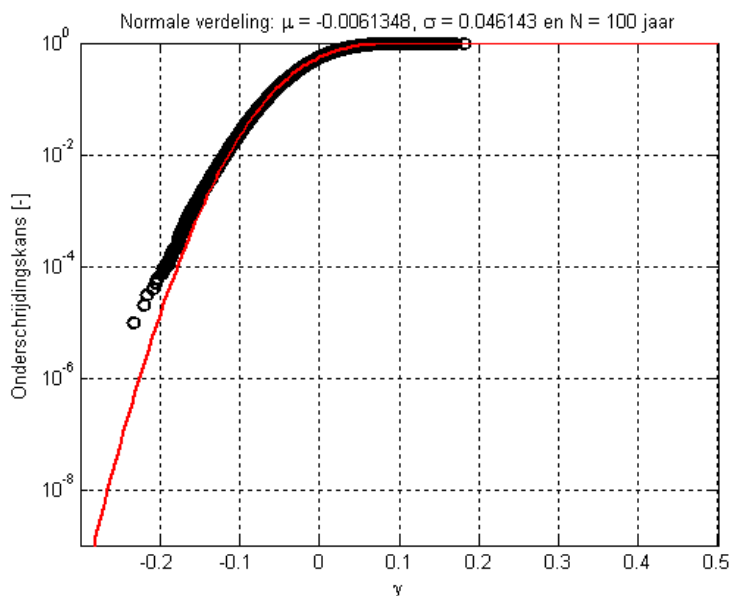
*Figuur 4-10 De empirische cumulatieve verdeling volgens de data uit Figuur 4-8, uitgezet tegen de cumulatieve verdeling volgens de fit, voor de Gammaverdeling.*



*Figuur 4-11 De empirische cumulatieve verdeling volgens de data uit Figuur 4-8, uitgezet tegen de cumulatieve verdeling volgens de fit, voor de normale verdeling.*



Figuur 4-12 De empirische verdeling volgens de data uit Figuur 4-8, uitgezet tegen de onderschrijdingskans volgens de fit, voor de Gammaverdeling. Logaritmische weergave.



Figuur 4-13 De empirische verdeling volgens de data uit Figuur 4-8, uitgezet tegen de onderschrijdingskans volgens de fit, voor de normale verdeling. Logaritmische weergave.

In paragraaf 5.2 zal blijken dat de normale verdeling prima gebruikt kan worden als uitgangspunt voor  $w(\gamma)$ , omdat de resultaten nauwelijks anders zijn dan op basis van de gammaverdeling als beschrijving voor  $w(\gamma)$ , terwijl de normale verdeling veel handiger is in het gebruik dan een gammaverdeling.

De parameters van de hier beschouwde normale verdeling voor  $w(\gamma)$  zijn, voor  $N = 100$  jaar, gelijk aan:

$$\begin{aligned} \mu &= -0.006135 \quad [-] \\ \sigma &= 0.04614 \quad [-] \end{aligned} \quad (4.23)$$

N.B. Het betreft geen definitieve keuzes uit de methode, zie voor de uiteindelijke keuzes paragraaf 4.5 en 4.6. Merk op dat de normale verdeling met parameters volgens (4.23) een gemiddelde heeft dat ongelijk is aan 0. Omdat deze fit is gebaseerd op een zeer groot aantal bootstraps ( $N_b = 10^5$ ), is hier geen sprake van een onnauwkeurige schatting door statistische ruis. De ML-schatting van  $\gamma$  blijkt een *negatieve* bias te hebben. Die bias wordt alleen kleiner bij beschouwen van een veel langere meetreeks dan  $N = 100$  jaar. We beschikken echter niet over (aanzienlijk) langere meetreeksen.

Verder blijkt dat het  $10^{-4}$ -kwantiel, dat volgt uit toepassen van de bootstraphmethode op de exponentiële frequentieverdeling  $F(X > x)$  ook een bias heeft, maar dan een *positieve* bias. In paragraaf 4.5 wordt deze bias behandeld.

## 4.3 Verwerken onzekerheid in de Weibullverdelingen voor de kust via transformatie

### 4.3.1 1 op 1 transformatie tussen X en zeewaterstand M

Hiervoor is beschreven hoe onzekerheden in  $F(X > x)$  kunnen worden verwerkt, waarbij  $X$  correspondeert met een exponentiële verdeling, zie (4.4). Om de onzekerheden in de feitelijke (omni)directionele verdelingen  $F(M > m)$  van de vorm (4.1) te verwerken, wordt een transformatie gebruikt, die waarden in het  $x$ -vlak overvoert in waarden uit het  $m$ -vlak en vice versa.

Die transformatie wordt verkregen door de overschrijdingsfrequenties van  $x$  en  $m$  aan elkaar gelijk te stellen:

$$F(X > x) = F(M > m) \quad (4.24)$$

wat volgens (4.4) en (4.1) in principe neerkomt op:

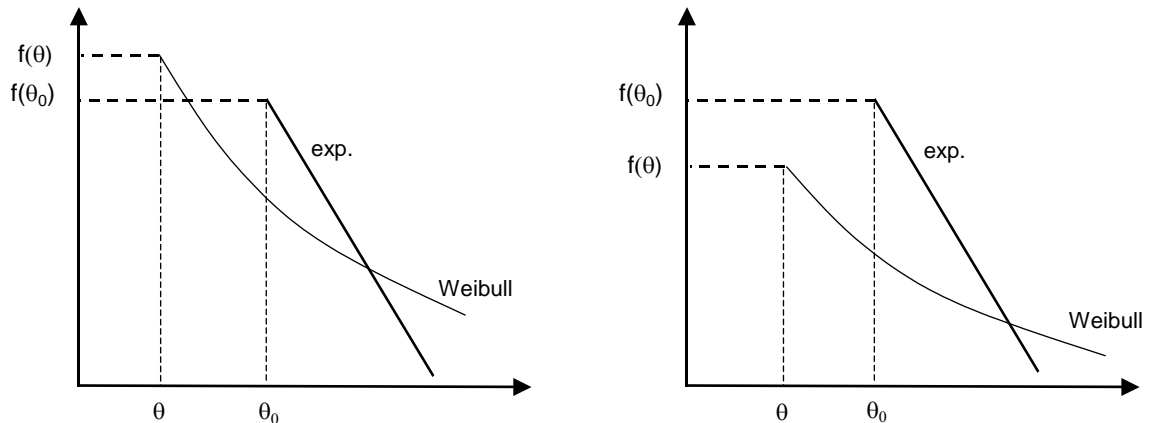
$$f(\theta_0) \exp\left\{-\frac{x-\theta_0}{\sigma_0}\right\} = f(\theta) \exp\left\{-\left(\frac{m}{\sigma}\right)^\alpha + \left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^\alpha\right\}, \text{ indien } (x, m) \text{ bestaan zdd } m \geq \theta, x \geq \theta_0 \quad (4.25)$$

Een probleem is hier dat de frequenties van beide drempelwaarden kunnen verschillen, in welk geval een deel van de  $x$ - of  $m$ -waarden niet is gedefinieerd. Hoe daar mee om te gaan komt zometeen aan de orde.

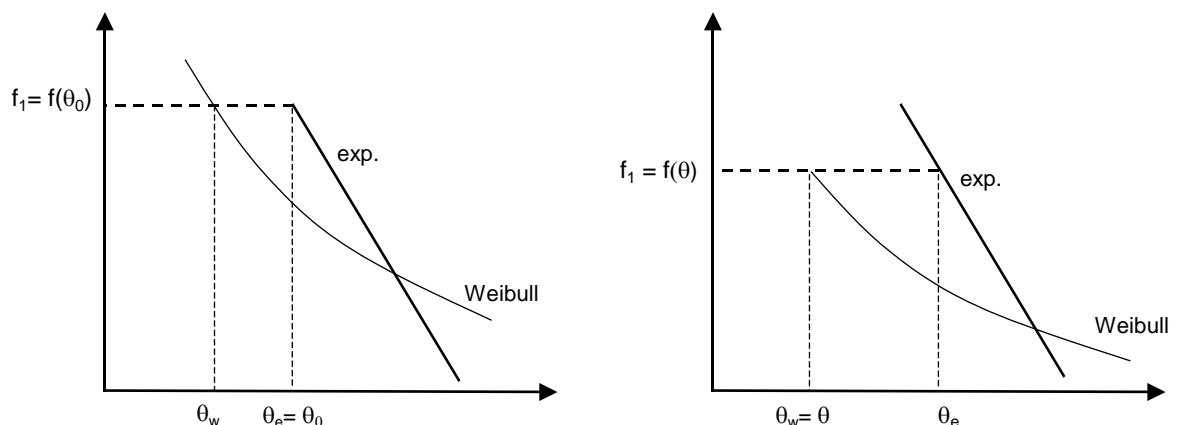
Eerst wordt benadrukt dat het toepassen van deze transformatie de crux is van de hele methode: de BI's op basis van een exponentiële (moeder) frequentieverdeling worden door de transformatie omgevormd tot BI's voor de gewenste Weibull (moeder)verdeling. Deze procedure is toegelicht met figuren in paragraaf 4.1. N.B. De resultaten worden door ons adequaat geacht, mede omdat in hoofdstuk 3 is gebleken dat de BI's voor de Weibull moederverdeling enorm afhankelijk van allerlei subjectieve keuzes in de berekening van deze BI's. Daarom wordt de voorkeur gegeven aan een methode die:

- visueel gezien redelijke BI's geeft,
- berekeningstechnisch eenvoudig is (zie daarover paragraaf 4.4) en
- flexibel is, in de zin dat bredere of smallere BI's eenvoudig zijn te verkrijgen door enkele parameters in de methode aan te passen (zie daarover de keuzes van  $\mu_w$  en  $\sigma_w$  in paragraaf 4.6).

Nu volgen details betreffende het definitiegebied van de transformatie uit (4.25). Bij verschillende drempelfrequenties  $f(\theta)$  en  $f(\theta_0)$  kunnen zich twee situaties voordoen, zoals geïllustreerd in Figuur 4-14 (de situatie met gelijke drempelfrequenties levert geen probleem, zodat die niet wordt beschouwd). De transformatie wordt beperkt tot punten  $(x, m)$  waarvoor  $F(X > x)$  en  $F(M > m)$  beiden gedefinieerd zijn.



Figuur 4-14: Links: overschrijdingsfrequentie van de Weibullverdeling hoger dan die van de exponentiële. Rechts: overschrijdingsfrequentie van de Weibullverdeling lager dan die van de exponentiële.



Figuur 4-15: Links: overschrijdingsfrequentie Weibullverdeling wordt aangepast, zodat  $f(\theta_w) = f_1$ . Rechts: overschrijdingsfrequentie van de exponentiële verdeling wordt aangepast, zodat  $f(\theta_e) = f_1$ .

Om een gemeenschappelijk definitiegebied te vinden, definiëren we  $f_1$  als het minimum van de drempelfrequenties:

$$f_1 = \min \{ f(\theta_0), f(\theta) \} \quad (4.26)$$

Voor frequenties onder deze waarde  $f_1$  zijn beide verdelingen dan gedefinieerd. In Figuur 4-5 wordt dat toegelicht. In het linker plaatje wordt de drempel van de Weibull aangepast: de nieuwe drempel  $\theta_w$  heeft dan als frequentie  $f(\theta_w) = f_1 = f(\theta_0)$ . In het rechter plaatje wordt de drempel van de exponentiële verdeling aangepast: de nieuwe drempel  $\theta_e$  heeft dan als frequentie  $f(\theta_e) = f_1 = f(\theta)$ . Het is eenvoudig te verifiëren dat de aangepaste drempels zijn te berekenen als volgt.

**Situatie  $f_1 = f(\theta_0)$ : drempel Weibull wordt aangepast** (Figuur 4-15, linker plaatje):

$$\begin{aligned}\theta_w &= \sigma \left\{ \left( \frac{\theta}{\sigma} \right)^\alpha + \ln \left( \frac{f(\theta)}{f(\theta_0)} \right) \right\}^{1/\alpha} \\ \theta_e &= \theta_0\end{aligned}\quad (4.27)$$

**Situatie  $f_1 = f(\theta)$ : drempel exponentiële verdeling wordt aangepast** (Figuur 4-15, rechter plaatje):

$$\begin{aligned}\theta_w &= \theta \\ \theta_e &= \theta_0 - \sigma_0 \ln \left( \frac{f(\theta)}{f(\theta_0)} \right)\end{aligned}\quad (4.28)$$

Als gevolg van deze aanpassingen geldt nu:

Voor  $x \geq \theta_e$ :

$$F(X > x) = f(\theta_0) \exp \left\{ -\frac{x - \theta_0}{\sigma_0} \right\} = f_1 \exp \left\{ -\frac{x - \theta_e}{\sigma_0} \right\} \quad (4.29)$$

Voor  $m \geq \theta_w$ :

$$F(M > m) = f(\theta) \exp \left\{ -\left( \frac{m}{\sigma} \right)^\alpha + \left( \frac{\theta}{\sigma} \right)^\alpha \right\} = f_1 \exp \left\{ -\left( \frac{m}{\sigma} \right)^\alpha + \left( \frac{\theta_w}{\sigma} \right)^\alpha \right\} \quad (4.30)$$

De transformatie (4.24) kan na deze aanpassingen als volgt worden geschreven:

$$\text{Voor } x \geq \theta_e, m \geq \theta_w: \quad f_1 \exp \left\{ -\frac{x - \theta_e}{\sigma_0} \right\} = f_1 \exp \left\{ -\left( \frac{m}{\sigma} \right)^\alpha + \left( \frac{\theta_w}{\sigma} \right)^\alpha \right\} \quad (4.31)$$

Deze relatie levert een 1 op 1 verband tussen  $x$  en  $m$ . Door  $x$  op te lossen als functie van  $m$  volgt:

$$\text{Voor } m \geq \theta_w: \quad x(m) = \theta_e - \sigma_0 \left\{ -\left( \frac{m}{\sigma} \right)^\alpha + \left( \frac{\theta_w}{\sigma} \right)^\alpha \right\} \quad (4.32)$$

Omgekeerd volgt, door  $m$  op te lossen als functie van  $x$ :

$$\text{Voor } x \geq \theta_e: \quad m(x) = \sigma \left\{ \frac{x - \theta_e}{\sigma_0} + \left( \frac{\theta_w}{\sigma} \right)^\alpha \right\}^{1/\alpha} \quad (4.33)$$

Merk op dat onder deze transformaties de drempelwaarden  $\theta_e$  en  $\theta_w$  in elkaar overgaan. Dat blijkt direct door invullen van  $m = \theta_w$  in (4.32), of  $x = \theta_e$  in (4.33).



### 4.3.2 Toepassing transformatie om onzekerheid Weibullverdelingen te modelleren

We brengen in herinnering dat  $F(X_\gamma > x)$  is vastgelegd door (4.7) en (4.9), zodat geschreven kan worden (N.B. Hierin staat  $\theta_0$  als drempel, en niet  $\theta_e$ ):

$$F(X_\gamma > x) = \begin{cases} f(\theta_0) \left\{ 1 + \gamma \left( \frac{x - \theta_0}{\sigma_0} \right) \right\}^{-\frac{1}{\gamma}}, & \gamma \neq 0 \\ f(\theta_0) \exp\left(-\frac{(x - \theta_0)}{\sigma_0}\right), & \gamma = 0 \end{cases} \quad (4.34)$$

De transformatie (4.32) wordt nu gebruikt om een geschikte corresponderende verdeling te vinden voor de stochast  $M_\gamma$ . Daarbij definiëren we:

Voor  $m \geq \theta_w$ :

$$F(M_\gamma > m) \equiv F(X_\gamma > x(m)) \quad (4.35)$$

$$= \begin{cases} f(\theta_0) \left\{ 1 + \gamma \left( \frac{\theta_e - \theta_0}{\sigma_0} \right) - \gamma \left[ -\left( \frac{m}{\sigma} \right)^\alpha + \left( \frac{\theta_w}{\sigma} \right)^\alpha \right] \right\}^{-\frac{1}{\gamma}}, & \gamma \neq 0 \\ f(\theta_0) \exp\left\{ -\left( \frac{\theta_e - \theta_0}{\sigma_0} \right) + \left[ -\left( \frac{m}{\sigma} \right)^\alpha + \left( \frac{\theta_w}{\sigma} \right)^\alpha \right] \right\}, & \gamma = 0 \end{cases}$$

waarbij  $x(m)$  uit (4.32) is gebruikt.

Door gebruik te maken van (4.28) en (4.27) kan (4.35) worden herschreven. Daarbij worden de twee situaties uit (4.28) en (4.27) apart onderscheiden.

#### Situatie $f_1 = f(\theta)$ : drempel exponentiële verdeling is aangepast

Formule (4.35) wordt in dit geval:

Voor  $m \geq \theta_w$ :

$$F(M_\gamma > m) \equiv F(X_\gamma > x(m)) \quad (4.36)$$

$$= \begin{cases} f(\theta_0) \left\{ 1 + \gamma \ln\left(\frac{f(\theta)}{f(\theta_0)}\right) + \gamma \left[ \left( \frac{m}{\sigma} \right)^\alpha - \left( \frac{\theta_w}{\sigma} \right)^\alpha \right] \right\}^{-\frac{1}{\gamma}}, & \gamma \neq 0 \\ f(\theta_0) \exp\left\{ -\ln\left(\frac{f(\theta)}{f(\theta_0)}\right) - \left[ \left( \frac{m}{\sigma} \right)^\alpha - \left( \frac{\theta_w}{\sigma} \right)^\alpha \right] \right\}, & \gamma = 0 \end{cases}$$

#### Situatie $f_1 = f(\theta_0)$ : drempel Weibull is aangepast

Formule (4.35) wordt in dit geval:

Voor  $m \geq \theta_w$ :

$$F(M_\gamma > m) \equiv F(X_\gamma > x(m)) \quad (4.37)$$

$$= \begin{cases} f(\theta_0) \left\{ 1 - \gamma \left[ -\left( \frac{m}{\sigma} \right)^\alpha + \left( \frac{\theta_w}{\sigma} \right)^\alpha \right] \right\}^{-\frac{1}{\gamma}}, & \gamma \neq 0 \\ f(\theta_0) \exp\left\{ -\left( \frac{m}{\sigma} \right)^\alpha + \left( \frac{\theta_w}{\sigma} \right)^\alpha \right\}, & \gamma = 0 \end{cases}$$

### 4.3.3 Hebben $\theta_0$ en $\sigma_0$ een speciale rol in de transformatie?

Uit bovenstaande formules blijkt dat  $\sigma_0$  en  $\theta_0$  niet voorkomen in de getransformeerde verdeling  $F(M_\gamma > m)$ : verschillen in keuzes voor deze parameters worden bij het uitvoeren van de transformatie blijkbaar 'geëlimineerd'. Alleen de keuze van  $f(\theta_0)$  blijkt van belang.

Dat de keuze van de overschrijdingsfrequentie  $f(\theta_0)$  invloed heeft op de mate van onzekerheid is plausibel. In hoofdstuk 3 bleek al dat de keuze van de overschrijdingsfrequentie van de drempelwaarde grote invloed heeft op de gevonden BI's.

Het feit dat  $\sigma_0$  en  $\theta_0$  er niet toe doen, houdt in dat *iedere* exponentiële frequentieverdeling kan worden genomen als uitgangspunt om onzekerheden te verwerken via de transformatiemethode. I.h.b. kan de standaardexponentiële frequentieverdeling worden genomen, van de vorm

$$F(X > x) = f(\theta_0) \exp\{-x\}, \quad x \geq \theta_0 = 0 \quad (4.38)$$

Voor de referentiesituatie wordt  $f(\theta_0) = 2.5$  per jaar genomen.

### 4.3.4 Uitintegreren van onzekerheid voor X en M

Het is de bedoeling om in Hydra-Ring onzekerheden in de kwantielen van de zeewaterstand mee te nemen. Hoe deze onzekerheden precies in dat model worden opgenomen valt buiten de scope van dit rapport. Wel is het interessant om te bezien hoe de frequentielijn volgens de Weibullverdeling verandert als daarin onzekerheden worden uitgeïntegreerd. Hier volgen de formules voor dit zogenaamde uitintegreren. In hoofdstuk 5 worden concrete voorbeelden gegeven voor uitgeïntegreerde versies van de Weibullverdelingen voor M.

Beschouw eerst de situatie voor de stochast X, met frequentielijn  $F(X > x)$  uit (4.4). Stel dat  $w(\gamma)$  bekend is. Om onzekerheden in de frequentielijn in rekening te brengen wordt een stochast  $X_{i_0}$  gedefinieerd, waarbij de index staat voor **i**nclusief **o**nzekerheid, met overschrijdingskans:

$$P(X_{i_0} > x) = \int w(\gamma) P(X_\gamma > x) d\gamma \quad (4.39)$$

De corresponderende frequentieverdeling volgt met (4.9) als:

$$F(X_{i_0} > x) = \int w(\gamma) F(X_\gamma > x) d\gamma \quad (4.40)$$

Voor de zeewaterstand  $M_{i_0}$  inclusief onzekerheid kan een soortgelijke formule worden gegeven:

$$F(M_{i_0} > m) = \int w(\gamma) F(M_\gamma > m) d\gamma \quad (4.41)$$

De frequentieverdeling van  $M_{i_0}$  kan eenvoudig in verband worden gebracht met die van  $X_{i_0}$ . Volgens (4.35) geldt namelijk:

$$F(M_{i_0} > m) = \int w(\gamma) F(X_\gamma > x(m)) d\gamma = F(X_{i_0} > x(m)) \quad (4.42)$$

Hieruit blijkt dat de frequentieverdeling voor  $M_{i_0}$  kan worden gevonden door simpelweg de getransformeerde waarde  $x(m)$  in te vullen in de frequentieverdeling voor  $X_{i_0}$ .

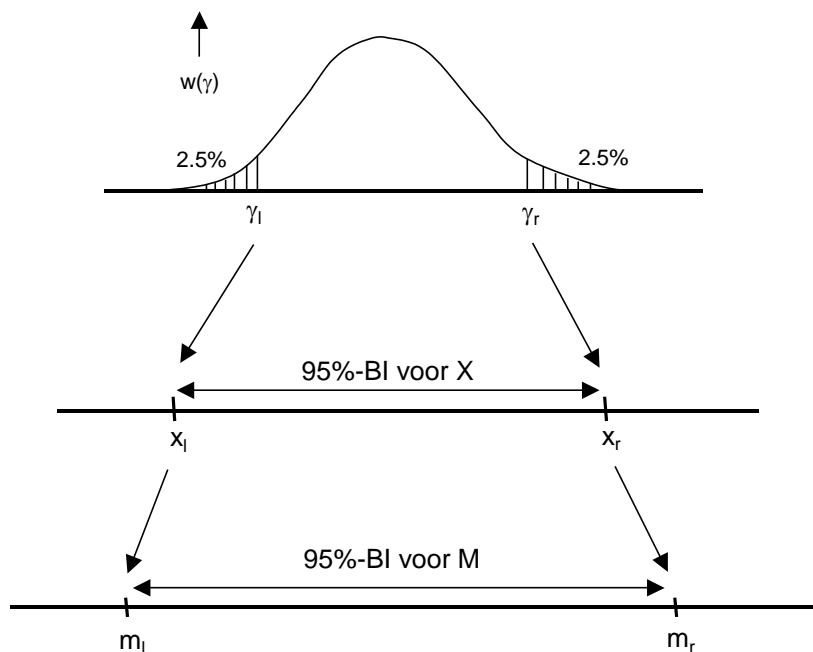
## 4.4 Procedure om BI's te bepalen

Hiervoor zijn formules gegeven om m.b.v. bootstraptrekkingen BI's te bepalen op basis van moederverdelingen voor  $X$  en  $M$ . Ook is door een transformatie het verband tussen  $X$  en  $M$  gelegd. In deze paragraaf wordt samengevat hoe uit de voorgaande formules BI's voor kwantielen kunnen worden bepaald. Om het simpel te houden wordt alleen het 95%-BI behandeld voor het  $10^{-4}$ -kwantiel. Voor andere BI's – bij andere overschrijdingsfrequenties dan  $10^{-4}$  – is de aanpak analoog.

In het volgende wordt uitgegaan van een normale kansdichtheid  $w(\gamma)$  voor de vormparameter  $\gamma$ . We duiden de bijbehorende stochast aan als  $\Gamma$ . De aanname dat deze stochast een normale verdeling volgt met gemiddelde  $\mu_w$  en standaarddeviatie  $\sigma_w$  wordt kortweg genoteerd als:

$$\Gamma \sim N(\mu_w, \sigma_w) \quad (4.43)$$

De keuzes van  $\mu_w$  en  $\sigma_w$  worden verderop behandeld (paragraaf 4.6). De procedure om BI's te bepalen verloopt volgens onderstaande stappen, zie Figuur 4-16.



Figuur 4-16 Toelichting bepalen 95%-BI voor  $X$  en  $M$  (schematisch).

### Stap 1

Bepaal  $\gamma_l$  en  $\gamma_r$  zodanig dat zich 2.5% onder  $\gamma_l$  bevindt en 2.5% boven  $\gamma_r$ :

$$\begin{aligned} P(\Gamma < \gamma_l) &= 2.5\% \\ P(\Gamma > \gamma_r) &= 2.5\% \end{aligned} \quad (4.44)$$

### Stap 2

Bepaal de  $10^{-4}$ -kwantielen  $x_l$  en  $x_r$  die horen bij  $X_{\gamma_l}$  en  $X_{\gamma_r}$ :

$$\begin{aligned} F(X_{\gamma_l} > x_l) &= 10^{-4} \\ F(X_{\gamma_r} > x_r) &= 10^{-4} \end{aligned} \quad (4.45)$$

waarbij  $F(X_\gamma > x)$  wordt gegeven door (4.34), en kan worden uitgegaan van de standaardexponentiële frequentieverdeling, met  $\theta_0 = 0$ ,  $\sigma_0 = 1$  en  $f(\theta_0) = 2.5$ .

**Stap 3**

Bepaal nu de corresponderende zeewaterstandkwantielen  $m_l$  en  $m_r$  door gebruik te maken van de transformatie uit (4.33):

$$\begin{aligned} m_l &= m(x_l) \\ m_r &= m(x_r) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Merk op dat dit inderdaad  $10^{-4}$ -kwantielen zijn van  $M_{\gamma_l}$  en  $M_{\gamma_r}$ , omdat vanwege (4.35) geldt:

$$\begin{aligned} F(M_{\gamma_l} > m_l) &= F(X_{\gamma_l} > x(m_l)) = F(X_{\gamma_l} > x_l) = 10^{-4} \\ F(M_{\gamma_r} > m_r) &= F(X_{\gamma_r} > x(m_r)) = F(X_{\gamma_r} > x_r) = 10^{-4} \end{aligned} \quad (4.47)$$

**Stap 4**

Het is nu eenvoudig te verifiëren dat voor alle  $\gamma < \gamma_l$  de verdeling  $M_{\gamma_l}$  een  $10^{-4}$ -kwantiel heeft dat kleiner is dan  $m_l$ .<sup>8</sup> Evenzo geldt dat voor alle  $\gamma > \gamma_r$  de verdeling  $M_{\gamma_r}$  een  $10^{-4}$ -kwantiel heeft dat groter is dan  $m_r$ . Tevens geldt dat voor alle  $\gamma \in [\gamma_l, \gamma_r]$  een  $10^{-4}$ -kwantiel resulteert dat ligt in het interval  $[m_l, m_r]$ . Omdat het interval  $[\gamma_l, \gamma_r]$  precies 95% van de mogelijke  $\gamma$ 's bevat is het gezochte 95%-BI van de zeewaterstand dan:

$$[m_l, m_r] = 95\text{-BI zeewaterstand} \quad (4.48)$$

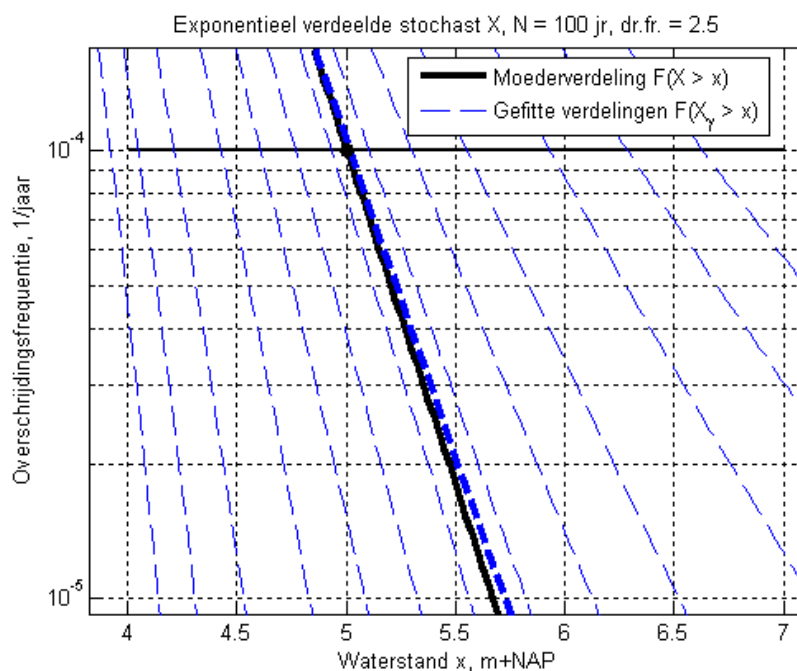
<sup>8</sup> Dat geldt omdat in de GPV's voor de definitie van  $X_\gamma$  wordt uitgegaan van een en dezelfde waarde  $\sigma = \sigma_0$ .

## 4.5 Aanpak bias in het $10^{-4}$ -kwantiel

### 4.5.1 Bias in $10^{-4}$ -kwantiel

In het voorgaande is min of meer gesuggereerd dat, met  $w(\gamma)$  als gefitte normale verdeling, op een 'recht toe recht aan' manier de gewenste BI's volgen voor de Weibulls van de kuststation. Helaas doet zich een complicatie voor, die te maken heeft met een bias in het  $10^{-4}$ -kwantiel.

We bekijken nog eens Figuur 4-1, maar dan uitvergroet ter plaatse van het  $10^{-4}$ -kwantiel en  $10^{-5}$ -kwantiel, zie Figuur 4-17. De bias is niet heel groot, slechts 1.5 cm bij het  $10^{-4}$ -kwantiel, maar wordt groter bij het  $10^{-5}$ -kwantiel (6 cm). Bovendien blijkt de bias na transformatie groter te kunnen worden, waarbij de bias na transformatie ook afhangt van de mate van kromming van de Weibulls voor de kuststations.



Figuur 4-17 Detailweergave van Figuur 4-1, waaruit de bias in het  $10^{-4}$ -kwantiel en  $10^{-5}$ -kwantiel blijkt.

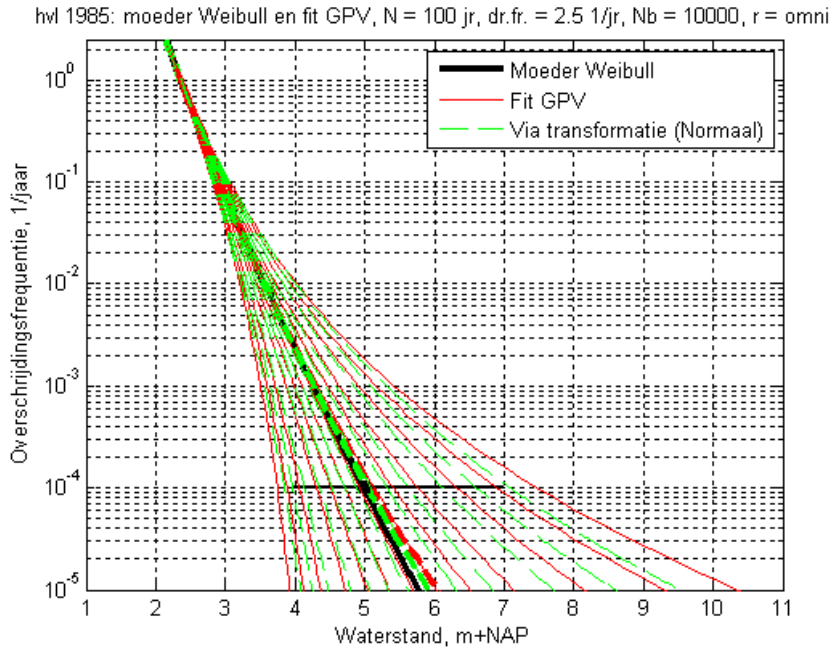
Dat de bias afhangt van de kromming van de Weibull van het kuststation wordt nu toegelicht. Figuur 4-18 geeft de resultaten voor Hoek van Holland en Figuur 4-19 die voor Delfzijl. De zwarte en rode lijnen in deze figuren hebben dezelfde betekenis als die in Figuur 3-2, maar nu zijn ook de lijnen volgens de transformatiemethode toegevoegd (groene lijnen), waarbij de ligging van de groene lijnen is bepaald met de normale verdeling met parameters (4.23). De bias voor deze stations blijkt de volgende grootte te hebben:

bias Hoek van Holland omnidirectioneel:

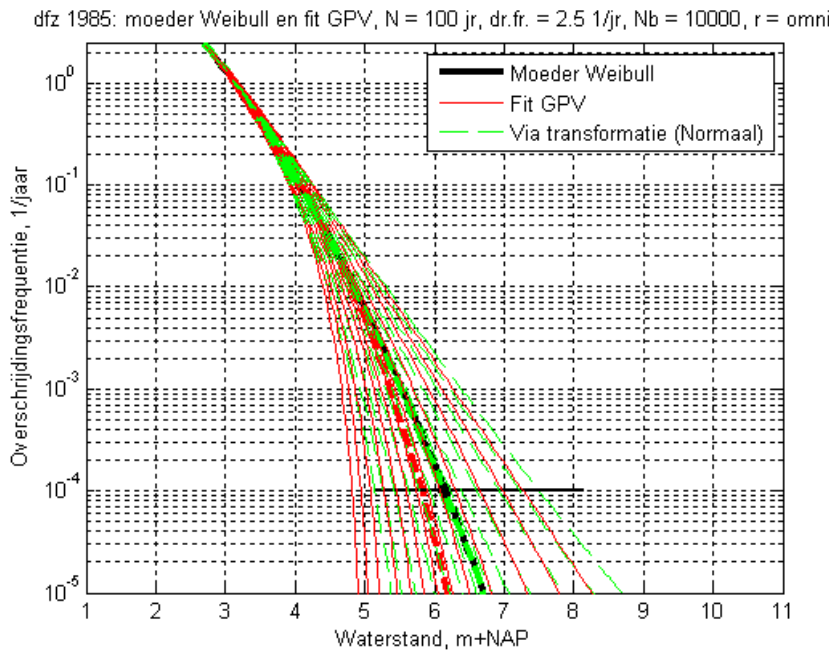
- $10^{-4}$ -kwantiel: +4.5 cm
- $10^{-5}$ -kwantiel: +14 cm.

bias Delfzijl omnidirectioneel:

- $10^{-4}$ -kwantiel: -1.5 cm
- $10^{-5}$ -kwantiel: 0 cm.



Figuur 4-18 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Hoek van Holland (omni). Kwantiellijnen volgens GPV en volgens de transformatiemethode. Zonder biascorrectie.



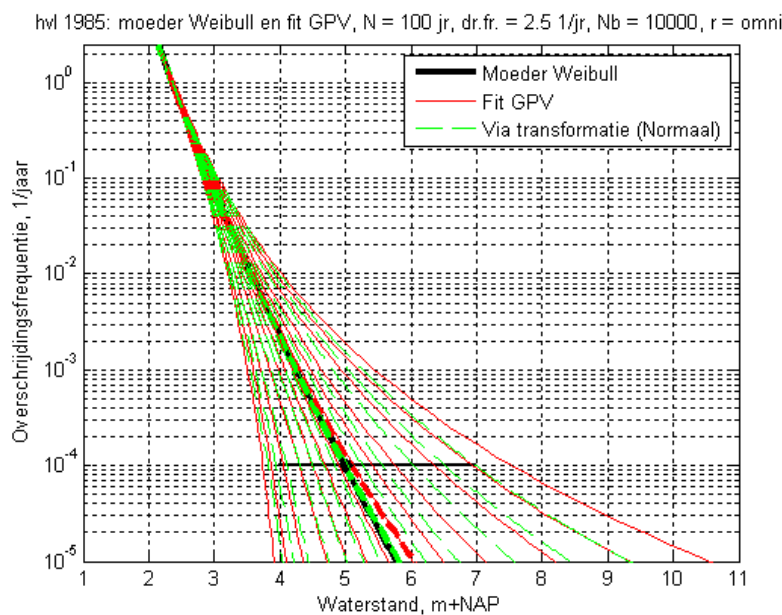
Figuur 4-19 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Delfzijl (omni). Kwantiellijnen volgens GPV en volgens de transformatiemethode. Zonder biascorrectie.

## 4.5.2 Verwijderen van de bias

De bias blijkt goeddeels verwijderd te kunnen worden door de  $\mu_w$  van de normale verdeling voor  $w(\gamma)$  aan te passen. Als dat is gedaan kunnen de (gecorrigeerde) groene lijnen als uitgangspunt dienen voor het bepalen van de BI's. Na verwijdering van de bias, waarover zometeen meer, resulteert voor bijvoorbeeld Hoek van Holland Figuur 4-20, waarvoor geldt:

bias Hoek van Holland omnidirectioneel, die overblijft na biascorrectie:

- $10^{-4}$ -kwantiel: -1 cm
- $10^{-5}$ -kwantiel: +5 cm.



Figuur 4-20 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Hoek van Holland (omni). Kwantiellijnen volgens GPV en volgens de transformatiemethode. Na correctie voor de bias.

Deze bias wordt door ons aanvaardbaar geacht. De groene lijnen uit een dergelijke figuur geven daarmee het 'eindresultaat' van de transformatiemethode om BI's te bepalen voor de kuststations. Merk op dat de groene lijnen minder spreiding vertonen dan de rode, op basis van de GPV-fit zoals uitgevoerd in paragraaf 3.2.2. Dat is enerzijds het gevolg van het feit dat in onze aanpak wordt gewerkt met een constante  $\sigma = \sigma_0$  in (4.7), en anderzijds van het feit dat de transformatie van een exponentiële naar een Weibullverdeling wat anders uitpakt dan het fitten van GPV's aan een moeder Weibullverdeling.

Ons inziens zijn de keuzes volgens de groene lijnen te verdedigen. Merk op dat de ondergrens volgens de meest linkse rode lijn, die hoort bij de 2.5% laagste kwantielen, een lager  $10^{-4}$ -kwantiel oplevert (namelijk 3.74 m+NAP) dan de meest linke groene lijn (3.82 m+NAP). De hogere waarde lijkt plausibeler, omdat in 1953 bij Hoek van Holland immers al de waterstand 4.0 m+NAP is opgetreden.<sup>9</sup> In ieder geval vormen de groene lijnen onze uiteindelijke keuzes voor Hoek van Holland.

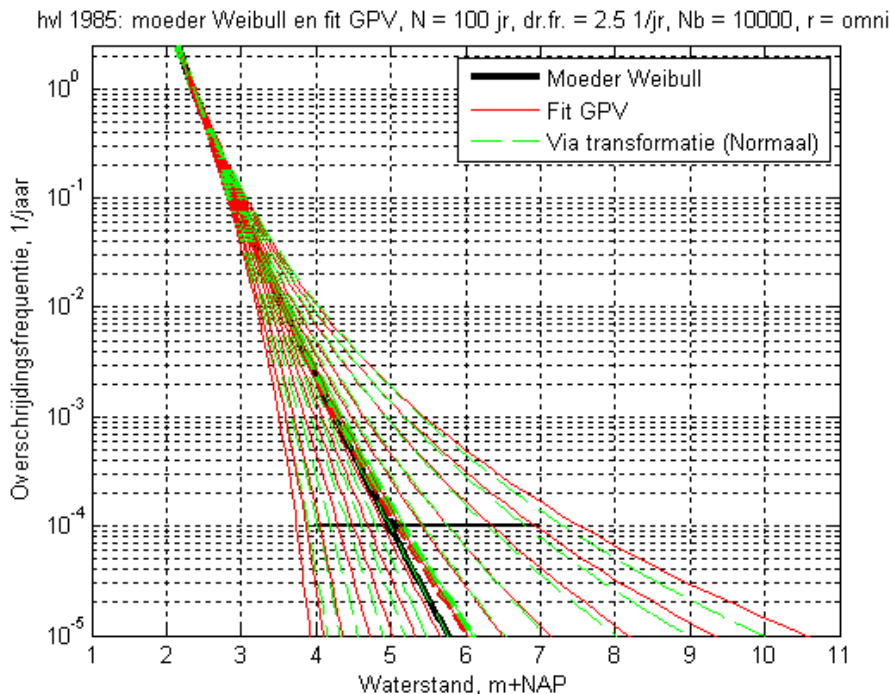
<sup>9</sup> Feitelijk is in 1953 volgens de rapporten over de basispeilen 3.85 m+NAP gemeten, wat omgerekend naar zichtjaar 1985 neerkomt op 4.0 m+NAP.

Het volledig verwijderen van de bias blijkt helaas niet mogelijk te zijn. De aanpassing van de  $\mu_w$  uit de normale verdeling voor  $w(\gamma)$  blijkt zodanig te kunnen gebeuren dat de bias voor het  $10^{-4}$ -kwantiel niet meer dan 1 á 2 cm bedraagt, terwijl die voor het  $10^{-5}$ -kwantiel iets groter kan zijn. Voor kwantielen bij lagere overschrijdingsfrequenties dan  $10^{-4}$  is de bias ongeveer gelijk aan die voor het  $10^{-4}$ -kwantiel of kleiner. In de volgende paragraaf wordt ingegaan op de definitieve keuzes voor  $\mu_w$  en  $\sigma_w$  uit de kansdichtheid  $w(\gamma)$ .

### 4.5.3 Alternatieve aanpak voor omgaan met de bias

In het voorgaande is de stilzwijgende aanname dat een bias in de kwantielen ongewenst is: het streven daarbij is dat het gemiddelde van de kwantielen, beschouwd bij eenzelfde overschrijdingsfrequentie, overeenstemt met het kwantiel van de (moeder) Weibullverdeling.

Er is ook een andere aanpak denkbaar, waarbij de bias in de kwantielen voor lief wordt genomen en eenvoudig  $\mu_w = 0$  wordt gekozen. Stel dat bootstraptrekkingen worden verricht uit de exponentiële moederverdeling  $F(X>x)$  uit (4.4); dan betekent deze aanpak dat de *vormparameter*  $\gamma$  uit de gefitte  $F(X>x)$  dan geen bias vertoont; het gemiddelde van  $w(\gamma)$  is dan immers op 0 gezet, en de waarde  $\gamma = 0$  correspondeert in de GPV met de exponentiële verdeling. Het gevolg is wel dat de bias in de kwantielen dan echter nog groter wordt, zie Figuur 4-21. De gestreepte groene lijn voor de kwantielgemiddelden komt dan ruim boven de moederverdeling te liggen: ter plaatse van  $10^{-4}$ -kwantiel betreft dat 0.15 m, en bij het  $10^{-5}$ -kwantiel 0.32 m. Daarnaast worden ook de BI's breder. Zo wordt het 95%-BI voor het  $10^{-4}$ -kwantiel dan [3.90 m+NAP, 7.30 m+NAP], terwijl dat in Figuur 4-20 gelijk was aan [3.82 m+NAP, 6.98 m+NAP]. De aanpak met  $\mu_w = 0$  wordt door ons ongeschikt gevonden en verder niet meer beschouwd.



Figuur 4-21 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Hoek van Holland (omni). Kwantiellijnen volgens GPV en volgens de transformatiemethode. N.B. Afwijkende keuzes t.b.v.  $w(\gamma)$ :  $\mu_w = 0$ ,  $\sigma_w = 0.04614$ .



## 4.6 Keuze $\mu_w$ en $\sigma_w$ voor normale verdeling $w(\gamma)$

Zoals opgemerkt in hoofdstuk 3 spelen allerlei subjectieve keuzes een rol voor wat betreft de uiteindelijke breedte van de BI's. In de aanpak uit deze studie wordt Hoek van Holland min of meer centraal gesteld, vandaar dat eerst de resultaten voor Hoek van Holland worden beschouwd, waarbij behalve de omnidirectionele gegevens uit Figuur 4-20 ook directionele gegevens aan de orde komen.

N.B. In principe zou een ander station als startpunt kunnen dienen, met min of meer dezelfde resultaten, maar gezien de bekendheid met Hoek van Holland geniet dat station de voorkeur. Na de behandeling daarvan worden de keuzes voor de overige stations behandeld.

### 4.6.1 Keuzes voor Hoek van Holland

Het doel is  $\mu_w$  en  $\sigma_w$  uit de normale verdeling voor  $w(\gamma)$  te bepalen, zie (4.43), zodat voor de omnidirectionele verdeling en alle relevante richtingen ( $210^\circ$ ,  $240^\circ$ , ...,  $360^\circ$ ) adequate BI's worden gevonden. Het is dan voldoende om de keuzes af te stemmen op de omnidirectionele verdeling, omdat de richtingen met de hoogste waterstanden qua gedrag, d.w.z. qua *kromming van de verdeling*, sterk lijken op de omnidirectionele verdeling. Dat laatste wordt hier niet verder toegelicht, maar blijkt uit de figuren met frequentielijnen uit [Roskam et al, 2000].

N.B. In hoofdstuk 3 bleek dat juist de kromming van de verdeling invloed heeft op de breedte van de BI's; andere parameters die daarop invloed hebben (keuze drempelfrequentie, lengte meetperiode liggen al min of meer vast).

Voor de omnidirectionele verdeling van Hoek van Holland wordt voor het  $10^{-4}$ -kwantiel, zoals becommentarieerd in paragraaf 4.5 uitgegaan van een bovengrens die 2.0 m boven het  $10^{-4}$ -kwantiel uit de basispeilen ligt, en een ondergrens die 1.15 m daaronder ligt; dat is de situatie uit Figuur 4-20, die correspondeert met  $\mu_w = -0.00904$  en  $\sigma_w = 0.04614$ .

Deze keuzes leiden tot de gegevens uit de zogenaamde *Eindtabel Hoek van Holland* (Tabel 4-1).

| $\mu = -0.0090351$ $\sigma = 0.04614$ |             |                | Grenzen betrouwbaarheidsintervallen bij gegeven percentages |           |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |              |
|---------------------------------------|-------------|----------------|---|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|--------------|
| r = omni                              | Wbl.        | Gem. TR        | 2.5%  | 5%        | 10%        | 20%        | 30%        | 40%        | 50%        | 60%        | 70%        | 80%        | 90%        | 95%        | 97.5%        |
| 10                                    | 2.94        | 2.93           | 2.82  | 2.83      | 2.85       | 2.87       | 2.89       | 2.91       | 2.92       | 2.94       | 2.96       | 2.98       | 3.01       | 3.04       | 3.06         |
| 100                                   | 3.57        | 3.55           | 3.21  | 3.26      | 3.31       | 3.38       | 3.43       | 3.48       | 3.53       | 3.58       | 3.64       | 3.71       | 3.81       | 3.91       | 4.00         |
| 1000                                  | 4.26        | 4.23           | 3.55  | 3.63      | 3.73       | 3.86       | 3.97       | 4.07       | 4.17       | 4.28       | 4.41       | 4.56       | 4.81       | 5.04       | 5.26         |
| 10000                                 | 4.99        | 4.98           | 3.82  | 3.94      | 4.10       | 4.32       | 4.50       | 4.67       | 4.84       | 5.04       | 5.26       | 5.56       | 6.05       | 6.51       | 6.98         |
| 100000                                | 5.78        | 5.83           | 4.04  | 4.21      | 4.43       | 4.74       | 5.01       | 5.27       | 5.54       | 5.85       | 6.22       | 6.72       | 7.57       | 8.43       | 9.33         |
| <b>r = 210</b>                        | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b> | <b>2.5%</b>   | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                    | 1.84        | 1.83           | 1.78  | 1.79      | 1.80       | 1.81       | 1.82       | 1.82       | 1.83       | 1.84       | 1.85       | 1.85       | 1.87       | 1.88       | 1.89         |
| 100                                   | 2.10        | 2.09           | 1.95  | 1.97      | 1.99       | 2.02       | 2.04       | 2.06       | 2.08       | 2.10       | 2.13       | 2.15       | 2.19       | 2.23       | 2.26         |
| 1000                                  | 2.36        | 2.35           | 2.09  | 2.12      | 2.16       | 2.21       | 2.26       | 2.29       | 2.33       | 2.37       | 2.42       | 2.48       | 2.57       | 2.65       | 2.72         |
| 10000                                 | 2.63        | 2.62           | 2.20  | 2.24      | 2.30       | 2.39       | 2.45       | 2.51       | 2.58       | 2.65       | 2.72       | 2.83       | 2.99       | 3.14       | 3.29         |
| 100000                                | 2.90        | 2.90           | 2.28  | 2.35      | 2.43       | 2.54       | 2.64       | 2.73       | 2.82       | 2.92       | 3.04       | 3.20       | 3.46       | 3.72       | 3.97         |
| <b>r = 240</b>                        | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b> | <b>2.5%</b>   | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                    | 2.18        | 2.17           | 2.11  | 2.12      | 2.13       | 2.14       | 2.15       | 2.16       | 2.17       | 2.18       | 2.19       | 2.20       | 2.22       | 2.23       | 2.25         |
| 100                                   | 2.52        | 2.51           | 2.33  | 2.36      | 2.38       | 2.42       | 2.45       | 2.48       | 2.50       | 2.53       | 2.56       | 2.60       | 2.65       | 2.70       | 2.74         |
| 1000                                  | 2.87        | 2.86           | 2.51  | 2.55      | 2.61       | 2.68       | 2.73       | 2.78       | 2.83       | 2.89       | 2.95       | 3.03       | 3.15       | 3.26       | 3.36         |
| 10000                                 | 3.23        | 3.22           | 2.65  | 2.72      | 2.80       | 2.91       | 3.00       | 3.08       | 3.16       | 3.26       | 3.36       | 3.50       | 3.72       | 3.93       | 4.13         |
| 100000                                | 3.60        | 3.60           | 2.77  | 2.85      | 2.96       | 3.11       | 3.24       | 3.37       | 3.49       | 3.63       | 3.80       | 4.02       | 4.38       | 4.74       | 5.09         |
| <b>r = 270</b>                        | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b> | <b>2.5%</b>   | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                    | 2.57        | 2.57           | 2.47  | 2.49      | 2.50       | 2.52       | 2.54       | 2.55       | 2.56       | 2.58       | 2.59       | 2.61       | 2.63       | 2.65       | 2.67         |
| 100                                   | 3.08        | 3.06           | 2.80  | 2.83      | 2.87       | 2.93       | 2.97       | 3.01       | 3.05       | 3.08       | 3.13       | 3.18       | 3.26       | 3.33       | 3.40         |
| 1000                                  | 3.60        | 3.57           | 3.06  | 3.12      | 3.20       | 3.30       | 3.38       | 3.46       | 3.53       | 3.61       | 3.71       | 3.82       | 4.00       | 4.17       | 4.32         |
| 10000                                 | 4.13        | 4.12           | 3.27  | 3.36      | 3.48       | 3.64       | 3.77       | 3.90       | 4.03       | 4.16       | 4.33       | 4.54       | 4.87       | 5.18       | 5.50         |
| 100000                                | 4.68        | 4.69           | 3.44  | 3.56      | 3.72       | 3.95       | 4.14       | 4.33       | 4.52       | 4.73       | 4.99       | 5.32       | 5.88       | 6.42       | 6.98         |
| <b>r = 300</b>                        | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b> | <b>2.5%</b>   | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                    | 2.71        | 2.70           | 2.58  | 2.60      | 2.62       | 2.64       | 2.66       | 2.68       | 2.69       | 2.71       | 2.73       | 2.75       | 2.78       | 2.81       | 2.83         |
| 100                                   | 3.36        | 3.33           | 2.99  | 3.04      | 3.09       | 3.16       | 3.22       | 3.27       | 3.32       | 3.37       | 3.43       | 3.50       | 3.60       | 3.70       | 3.78         |
| 1000                                  | 4.04        | 4.02           | 3.33  | 3.41      | 3.51       | 3.65       | 3.76       | 3.86       | 3.96       | 4.07       | 4.19       | 4.35       | 4.59       | 4.81       | 5.03         |
| 10000                                 | 4.76        | 4.75           | 3.61  | 3.73      | 3.89       | 4.10       | 4.28       | 4.45       | 4.62       | 4.81       | 5.03       | 5.32       | 5.78       | 6.22       | 6.65         |
| 100000                                | 5.52        | 5.55           | 3.83  | 4.00      | 4.21       | 4.52       | 4.78       | 5.03       | 5.30       | 5.59       | 5.94       | 6.41       | 7.20       | 7.98       | 8.78         |
| <b>r = 330</b>                        | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b> | <b>2.5%</b>   | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                    | 2.63        | 2.62           | 2.50  | 2.51      | 2.54       | 2.56       | 2.58       | 2.60       | 2.62       | 2.64       | 2.66       | 2.68       | 2.72       | 2.75       | 2.77         |
| 100                                   | 3.34        | 3.32           | 2.94  | 2.99      | 3.05       | 3.13       | 3.19       | 3.25       | 3.30       | 3.35       | 3.42       | 3.49       | 3.61       | 3.71       | 3.81         |
| 1000                                  | 4.09        | 4.06           | 3.31  | 3.40      | 3.51       | 3.66       | 3.78       | 3.89       | 4.00       | 4.12       | 4.25       | 4.42       | 4.68       | 4.93       | 5.16         |
| 10000                                 | 4.87        | 4.86           | 3.62  | 3.75      | 3.92       | 4.16       | 4.35       | 4.53       | 4.72       | 4.92       | 5.16       | 5.47       | 5.97       | 6.45       | 6.92         |
| 100000                                | 5.69        | 5.72           | 3.86  | 4.04      | 4.28       | 4.61       | 4.89       | 5.17       | 5.45       | 5.77       | 6.15       | 6.66       | 7.50       | 8.35       | 9.21         |
| <b>r = 360</b>                        | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b> | <b>2.5%</b>   | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                    | 2.18        | 2.17           | 2.07  | 2.09      | 2.10       | 2.12       | 2.14       | 2.15       | 2.17       | 2.18       | 2.19       | 2.21       | 2.24       | 2.26       | 2.28         |
| 100                                   | 2.70        | 2.68           | 2.41  | 2.44      | 2.49       | 2.55       | 2.59       | 2.63       | 2.67       | 2.71       | 2.76       | 2.81       | 2.90       | 2.97       | 3.04         |
| 1000                                  | 3.24        | 3.22           | 2.68  | 2.75      | 2.83       | 2.94       | 3.02       | 3.10       | 3.18       | 3.26       | 3.36       | 3.48       | 3.67       | 3.84       | 4.01         |
| 10000                                 | 3.81        | 3.79           | 2.90  | 3.00      | 3.12       | 3.29       | 3.43       | 3.56       | 3.70       | 3.84       | 4.01       | 4.23       | 4.58       | 4.92       | 5.24         |
| 100000                                | 4.39        | 4.40           | 3.08  | 3.21      | 3.38       | 3.62       | 3.82       | 4.01       | 4.22       | 4.44       | 4.71       | 5.06       | 5.65       | 6.22       | 6.81         |

Tabel 4-1 Eindtabel Hoek van Holland met betrouwbaarheidsintervallen (BI's) van de kwantilen van de overschrijdingsfrequentie van de zeewaterstand. Zichtjaar 1985.

Deze tabel bevat de volgende onderdelen:

- De waarden voor  $\mu_w$  en  $\sigma_w$  uit de normale verdeling voor  $w(\gamma)$ , waarmee de gegevens uit de tabel zijn berekend (linksboven weergegeven).
- Gegevens voor de omnidirectionele verdeling (omni) en directionele verdelingen voor 210°, 240°,..., 360°.
- Gegevens voor overschrijdingsfrequenties:  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$ , in de tabel weergegeven als terugkeertijden 10, 100,..., 100000 jaar.
- Kwantilen volgens de Weibullverdelingen bij de gegeven overschrijdingsfrequenties, voor zichtjaar 1985 (kolom Wbl).
- Per beschouwde overschrijdingsfrequentie het gemiddelde van de kwantilen zoals die zijn bepaald met de transformatiemethode (kolom Gem. TR).
- Per beschouwde overschrijdingsfrequentie de grenzen van de BI's, voor de percentages 2.5%, 5%,..., 95%, 97.5%.

Hier volgen twee voorbeelden:

1. Omnidirectionele overschrijdingsfrequentie  $10^{-4}$  per jaar, voor 95%-BI

Als 95%-BI voor het  $10^{-4}$ -kwantiel resulteert het interval: [3.82 m+NAP, 6.98 m+NAP], met een breedte van 3.16 m.

Bij deze overschrijdingsfrequentie levert de Weibullverdeling 4.99 m+NAP (het basispeil)<sup>10</sup>, terwijl het gemiddelde van alle 'mogelijke 10<sup>-4</sup>-kwantielen die in deze modellering kunnen optreden' gelijk is aan 4.98 m+NAP; de in paragraaf 4.5 genoemde bias is hier dus gelijk aan -0.01 m.

2. *Directionele overschrijdingsfrequentie 10<sup>-3</sup> per jaar, richting 300°, voor 90%-BI*

Als 90%-BI voor het 10<sup>-3</sup>-kwantiel resulteert het interval: [3.41 m+NAP, 4.81 m+NAP], met een breedte van 1.40 m.

Bij deze overschrijdingsfrequentie levert de Weibullverdeling 4.04 m+NAP, terwijl het gemiddelde van alle mogelijke 10<sup>-3</sup>-kwantielen die in deze modellering kunnen optreden gelijk is aan 4.02 m+NAP; de bias is hier gelijk aan -0.02 m.

Hiermee is Tabel 4-1 voldoende toegelicht.

## 4.6.2 Keuzes voor overige stations

Hoek van Holland heeft een (omnidirectionele) frequentielijn met een kromming naar boven. Voor stations met een kromming naar beneden is in hoofdstuk 3 gebleken dat de BI's smaller zijn dan die voor Hoek van Holland. Er wordt aangenomen dat deze kromming reëel is, en dat voor dergelijke stations smallere BI's resulteren.<sup>11</sup>

Om inzicht te krijgen in de kromming per station is een *krommingsindex*  $\beta$  ingevoerd. Eerst worden daarbij, voor de omnidirectionele verdeling, de volgende grootheden bepaald:

$$\begin{aligned} d_{54} &= \text{waterstand bij } 10^{-5} - \text{waterstand bij } 10^{-4} \\ d_{21} &= \text{waterstand bij } 10^{-2} - \text{waterstand bij } 10^{-1} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Dan wordt  $\beta$  gelijk genomen aan:

$$\beta = \frac{d_{54}}{d_{21}} \quad (4.50)$$

Voor bijvoorbeeld Hoek van Holland resulteert dat volgens Tabel 4-1 in:<sup>12</sup>

$$\beta = \frac{d_{54}}{d_{21}} = \frac{5.78 - 4.99}{3.57 - 2.94} = \frac{0.78}{0.63} = 1.24 \quad (4.51)$$

| Stations             | normale verdeling $w(\gamma)$ |          | krommings-index | breedte 95%-BI | gestandaardiseerde breedte 95%-BI |
|----------------------|-------------------------------|----------|-----------------|----------------|-----------------------------------|
|                      | $\mu$                         | $\sigma$ |                 |                |                                   |
|                      | [–]                           | [–]      | [–]             | m              | [–]                               |
| Vlissingen           | -0.01310                      | 0.06     | 0.99            | 2.95           | 1.34                              |
| OS11                 | -0.01310                      | 0.06     | 1.01            | 3.07           | 1.35                              |
| Hoek van Holland     | -0.00904                      | 0.04614  | 1.24            | 3.16           | 1.11                              |
| IJmuiden Buitenhaven | -0.00904                      | 0.04614  | 1.22            | 3.41           | 1.11                              |
| Den Helder           | -0.00760                      | 0.0536   | 0.78            | 2.36           | 1.08                              |
| Harlingen            | -0.00910                      | 0.0615   | 0.69            | 2.28           | 1.18                              |
| Lauwersoog           | -0.00760                      | 0.0536   | 0.75            | 2.27           | 1.06                              |
| Delfzijl             | -0.00910                      | 0.0615   | 0.72            | 2.75           | 1.05                              |

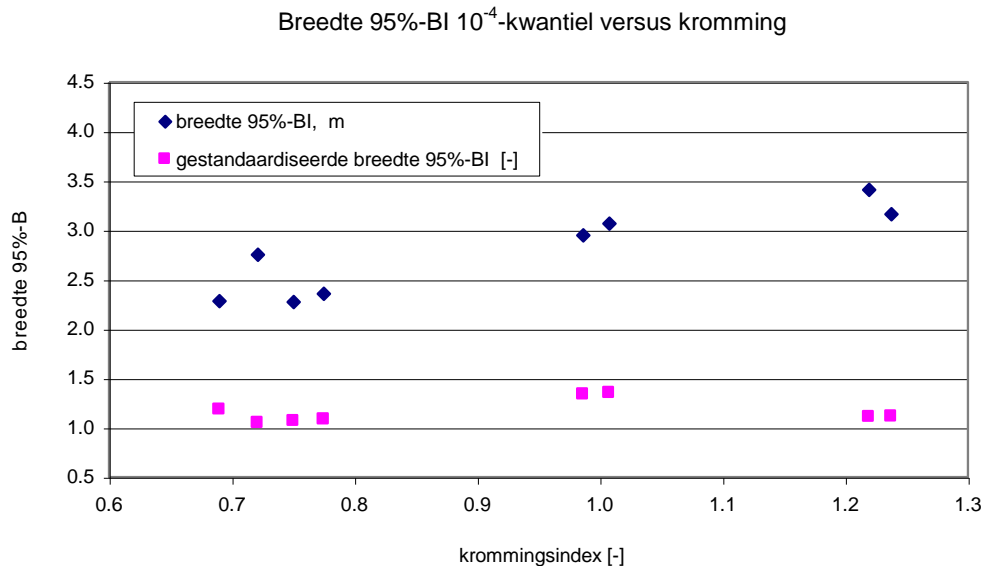
Tabel 4-2 Gegevens voor de acht basisstations.

<sup>10</sup> Merk op dat het officiële basispeil van 5.00 m+NAP door de Weibullverdeling uit de HR2006, waar 0.07 m zeespiegelstijging is afgetrokken, niet exact wordt gereproduceerd. Dat betreft geen numerieke onnauwkeurigheid in de berekeningen, maar volgt uit de voorgeschreven Weibullparameters.

<sup>11</sup> Als wordt aangenomen dat die kromming niet reëel is, moeten feitelijk de basispeilen voor deze stations worden herzien.

<sup>12</sup> Door afrondingen kunnen kleine numerieke onnauwkeurigheden voorkomen.

Zo kunnen voor de acht basisstations de krommingen worden bepaald. Deze staan in Tabel 4-2. Merk op dat de noordelijke stations krommingen duidelijk kleiner dan 1 hebben, dat Vlissingen en OS11 vrijwel geen kromming hebben (nagenoeg exponentiële frequentieverdelingen), terwijl Hoek van Holland en IJmuiden krommingen groter dan 1 hebben. De tabel bevat ook de gekozen  $\mu_w$  en  $\sigma_w$ , de breedte van het 95%-BI voor het  $10^{-4}$ -kwantiel en een gestandaardiseerde breedte, waarover zometeen meer.



Figuur 4-22 Afhankelijkheid van de breedte van het BI als functie van de krommingsindex.

De breedte van het 95%-BI is in Figuur 4-22 uitgezet als functie van de krommingsindex  $\beta$ , waaruit blijkt dat een grotere waarde voor  $\beta$  bredere BI's oplevert. De  $\mu_w$  en  $\sigma_w$  uit Tabel 4-2 zijn zo gekozen dat de BI's ruwweg overeenstemmen met figuren zoals gemaakt in hoofdstuk 3 voor de situatie "moederverdeling Weibull en fit GPV". Ook is er voor gezorgd dat de bias voor het  $10^{-4}$ -kwantiel maximaal 1 á 2 cm bedraagt.

Daarnaast zijn handmatig wat aanpassingen verricht aan de standaarduitkomsten van de transformatiemethode, waarbij  $\mu_w$  en  $\sigma_w$  zijn aangepast (zie kader hierna); zonder deze aanpassingen zouden Vlissingen en OS11 aanzienlijk smallere 95%-BI's hebben gekregen dan Hoek van Holland, terwijl de BI's voor Harlingen dan duidelijk smaller zouden zijn geworden dan die voor Den Helder. Dat laatste wordt door ons ongeschikt geacht.

Nu worden de keuzes ook nog op een andere wijze beoordeeld. De breedte van de BI's wordt niet alleen beïnvloed door de kromming, maar ook door de grootte van het  $10^{-4}$ -kwantiel. Zo heeft Delfzijl een voor groter  $10^{-4}$ -kwantiel dan Den Helder (6.15 m+NAP versus 4.39 m+NAP). Er is gepoogd een soort standaardisering op de breedte van het 95%-BI toe te passen. De breedtes zijn daarom gedeeld door:

$$d_{61} = \text{waterstand bij } 10^{-6} - \text{waterstand bij } 10^{-1} \quad (4.52)$$

Voor bijvoorbeeld Hoek van Holland is volgens Tabel 4-1 dan  $d_{61} = 5.78 - 2.94 = 2.84$  m, zodat de gestandaardiseerde breedte gelijk wordt aan  $3.16/2.84 = 1.11$ .

In Figuur 4-22 is ook de gestandaardiseerde breedte uitgezet als functie van  $\beta$ . Nu is te zien dat de breedte heel ruwweg onafhankelijk is van  $\beta$ . Op grond van de resultaten uit Figuur 4-22 voor de verschillende 'breedtematen van de BI's' concluderen we dat de keuzes voor  $\mu_w$  en  $\sigma_w$

adequaat zijn. Eindtabellen zoals in Tabel 4-1 voor Hoek van Holland zijn weergegeven in Bijlage B.

Invloed van  $\mu_w$  en  $\sigma_w$  op de breedte van de BI's

Om bredere BI's te krijgen hoeft alleen  $\sigma_w$  groter te worden gekozen. Een andere keuze van  $\sigma_w$  levert wel een wat andere bias in de kwantielen; die bias kan worden verwijderd door  $\mu_w$  iets aan te passen.

Neem als voorbeeld de aanpassingen voor Vlissingen, waarvoor door ons een breder BI is gewenst. Daartoe is de  $\sigma_w = 0.04614$  voor Hoek van Holland veranderd in  $\sigma_w = 0.06$  voor Vlissingen. Voor Hoek van Holland geldt  $\mu_w = -0.00904$ , die voor Vlissingen dan is veranderd in  $\mu_w = -0.0131$ , omdat de andere waarde voor  $\sigma_w$  anders een bias zou opleveren. (Voor OS11 zijn overigens dezelfde numerieke veranderingen doorgevoerd.)



## 5 Resultaten transformatiemethode voor de kust

In dit hoofdstuk worden figuren gegeven voor BI's bepaald met de transformatiemethode, op basis van de gegevens voor  $\mu_w$  en  $\sigma_w$  uit paragraaf 4.6. In de figuren staan ook gegevens zoals eerder bepaald in o.m. paragraaf 3.2.2, waarbij de moederverdeling een Weibull is en de gefitte verdeling de GPV. De volgende situaties worden beschouwd (paragraaf 5.1):

- Vlissingen
  - omnidirectioneel
  - 300°
  - 270°
- Hoek van Holland
  - omnidirectioneel
  - 300°
  - 270°
- Den Helder
  - omnidirectioneel
  - 300°
  - 270°
- Delfzijl
  - omnidirectioneel
  - 300°
  - 270°

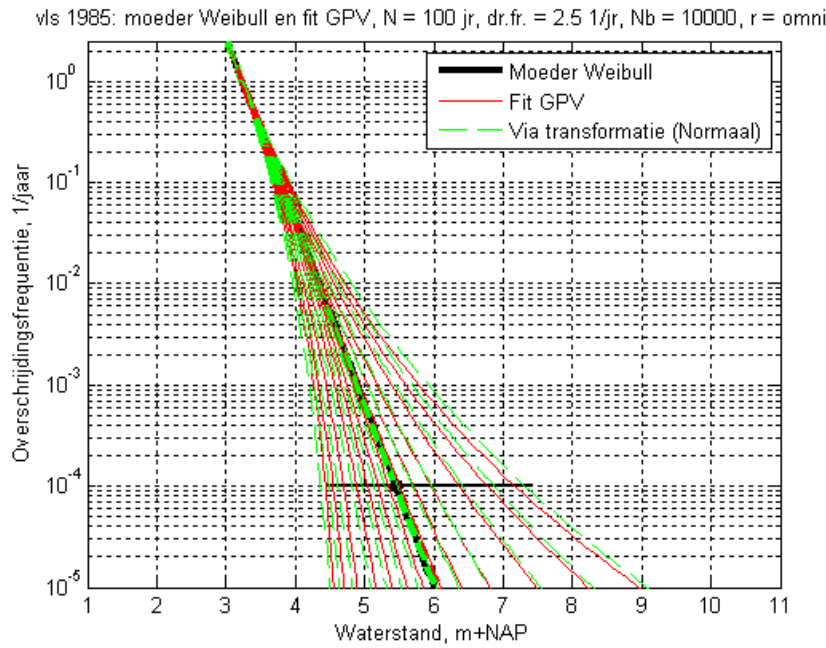
De resultaten worden slechts beknopt becommentarieerd, omdat in hoofdstuk 3 en 4 al het nodige over de aanpak en resultaten is gezegd.

Verder wordt voor de genoemde stations (alleen omnidirectioneel) getoond welk effect het uitintegreren van onzekerheid heeft op de frequentielijn (paragraaf 5.2).

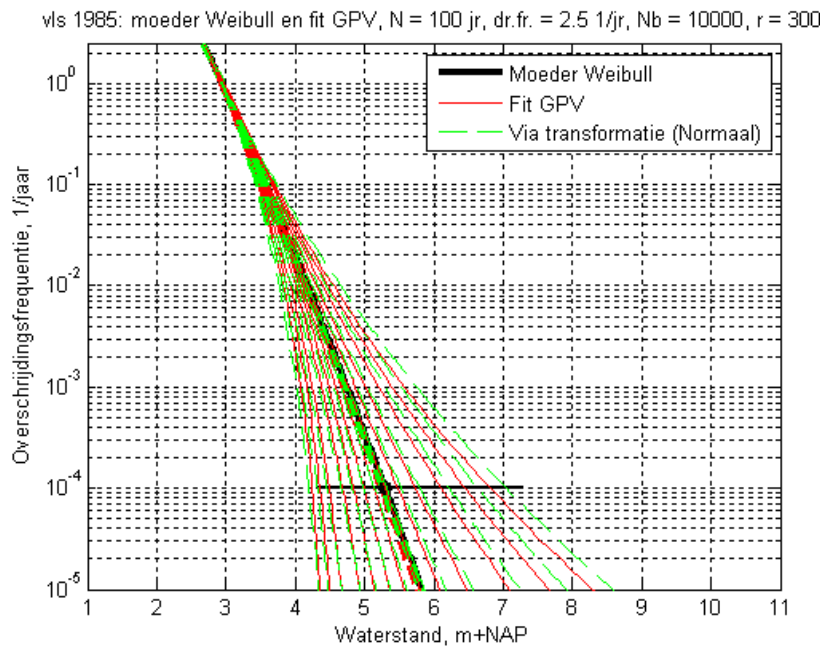
### 5.1 Resultaten BI's voor kuststations

#### 5.1.1 Vlissingen

De resultaten voor Vlissingen staan in Figuur 5-1 t/m Figuur 5-3. Merk op dat de groene lijnen, zoals bepaald met de transformatiemethode, hier wat breder uitlopen dan de rode. Reden daarvan is de in paragraaf 4.6.2 genoemde aanpassing van  $\mu_w$  en  $\sigma_w$ . We brengen in herinnering dat de betekenis van de zwarte en rode lijnen eerder is uitgelegd in paragraaf 3.2.1. De resultaten ogen o.i. plausibel.

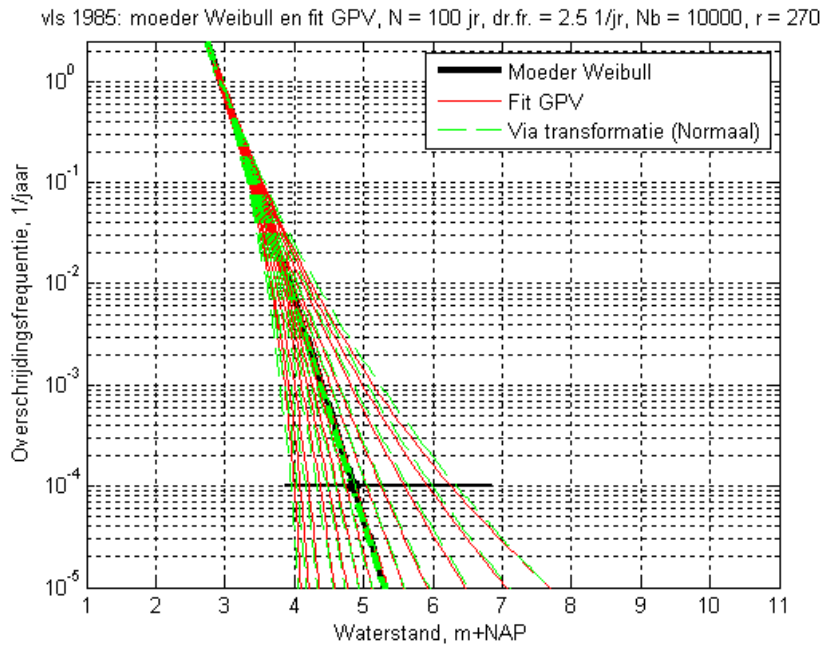


Figuur 5-1 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Vlissingen (omni). Kwantiellijnen volgens GPV en volgens de transformatiemethode.



Figuur 5-2 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Vlissingen (300°). Kwantiellijnen volgens GPV en volgens de transformatiemethode.

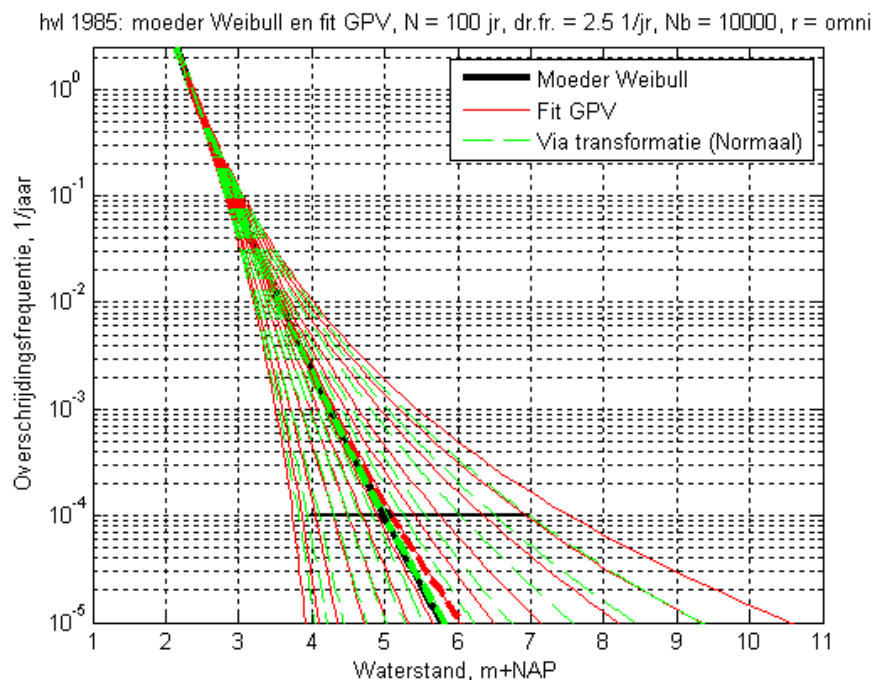




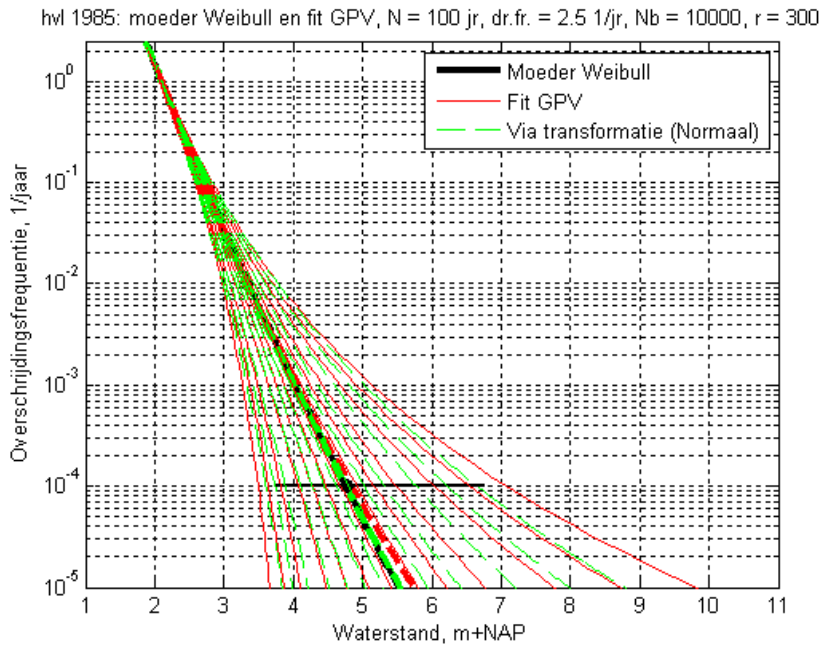
*Figuur 5-3* Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Vlissingen (270°). Kwantiellijnen volgens GPV en volgens de transformatiemethode.

### 5.1.2 Hoek van Holland

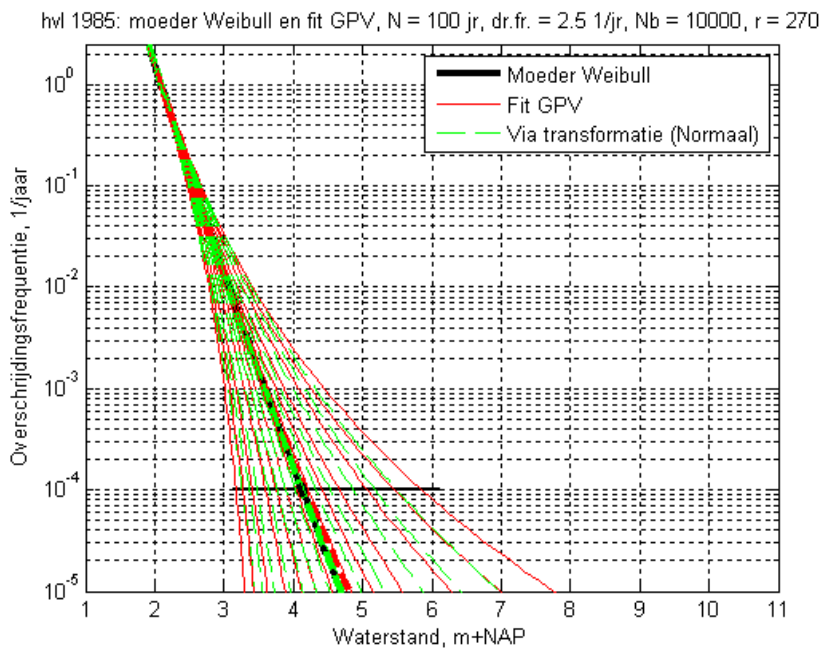
De resultaten voor Hoek van Holland staan in *Figuur 5-4* t/m *Figuur 5-6*. De resultaten, voor de omnidirectionele verdeling toegelicht in paragraaf 4.6.1, ogen o.i. plausibel.



*Figuur 5-4* Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Hoek van Holland (omni). Kwantiellijnen volgens GPV en volgens de transformatiemethode. N.B. Deze figuur is identiek aan *Figuur 4-20*.



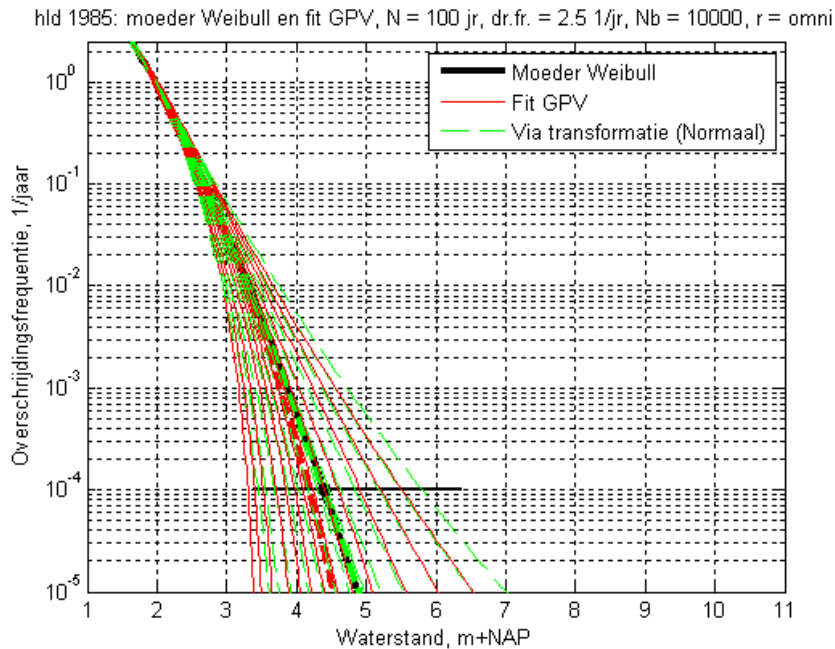
Figuur 5-5 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Hoek van Holland (300°). Kwantiellijnen volgens GPV en volgens de transformatiemethode.



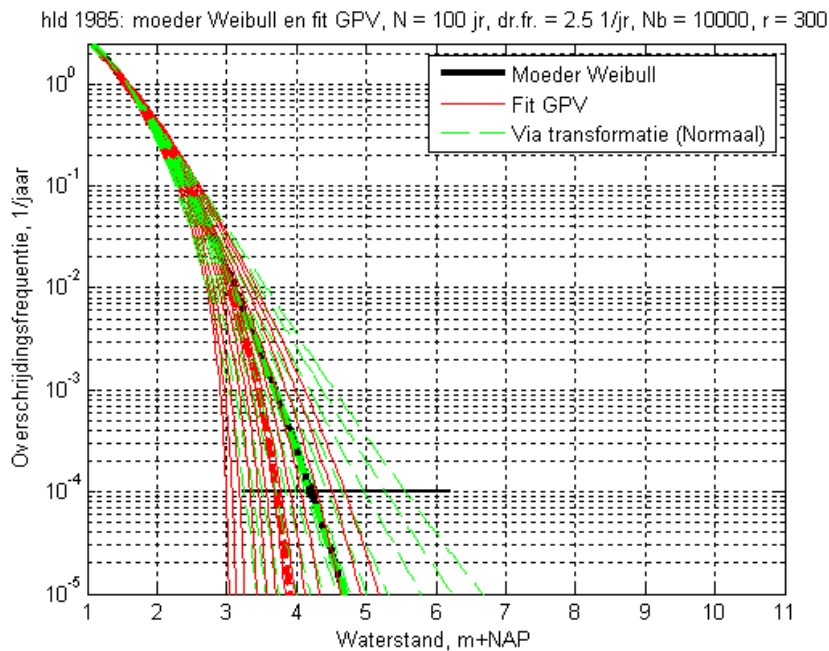
Figuur 5-6 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Hoek van Holland (270°). Kwantiellijnen volgens GPV en volgens de transformatiemethode.

### 5.1.3 Den Helder

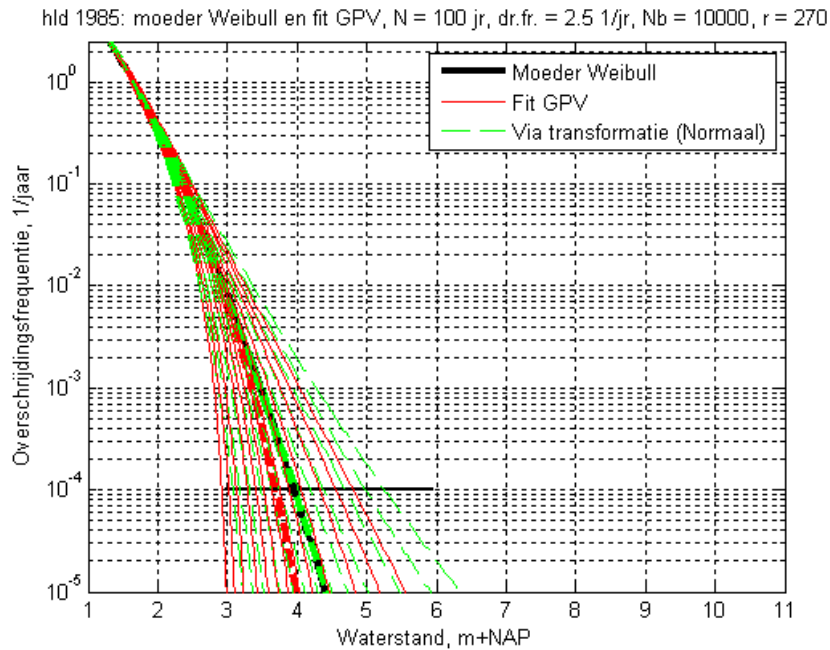
De resultaten voor Den Helder staan in Figuur 5-7 t/m Figuur 5-9. Merk op dat de gefitte GPV's voor de hogere kwantielen ver onder de moederverdeling liggen. De resultaten volgens de transformatie hebben als gemiddelde, afgezien van een kleine bias, wel de moederverdeling.



Figuur 5-7 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Den Helder (omni). Kwantiellijnen volgens GPV en volgens de transformatiemethode.



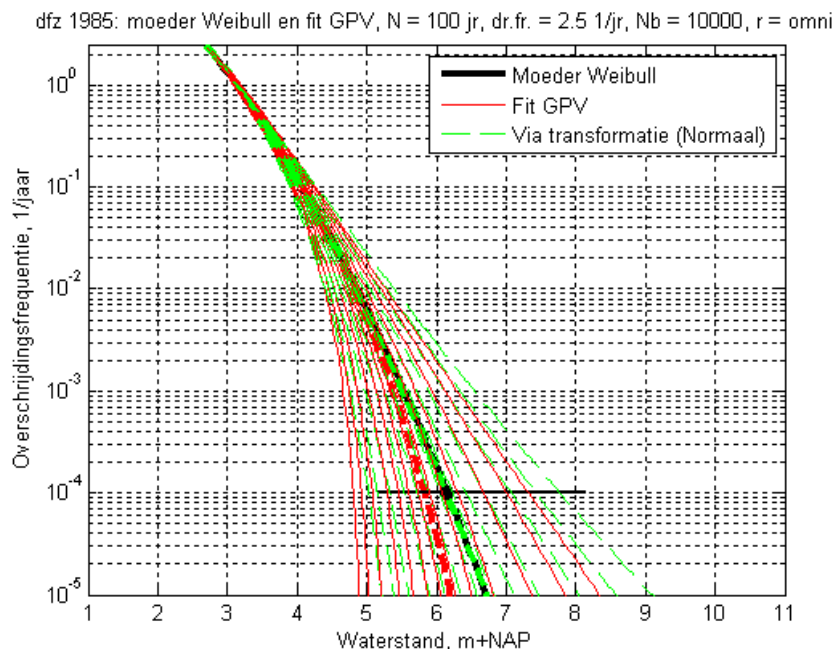
Figuur 5-8 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Den Helder (300°). Kwantiellijnen volgens GPV en volgens de transformatiemethode.



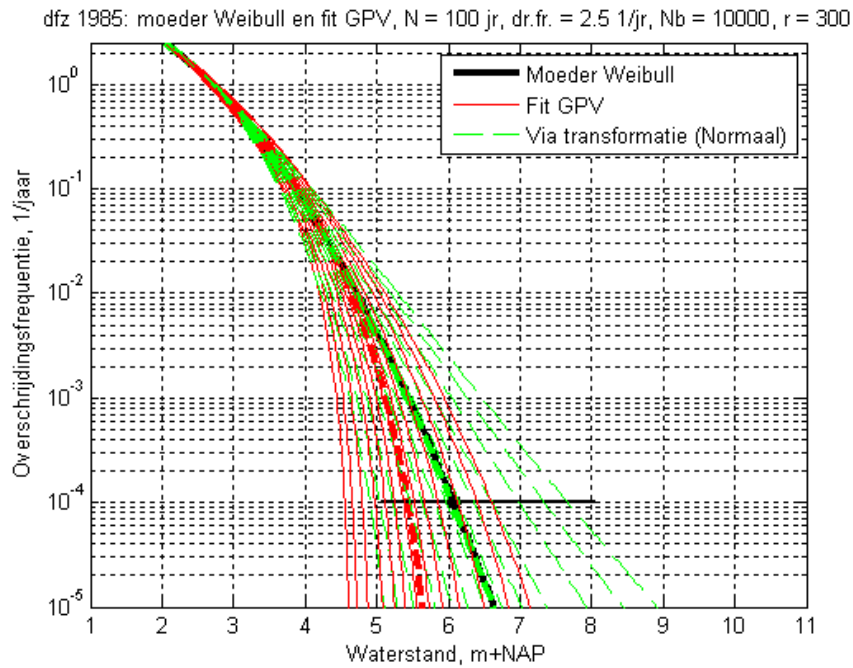
Figuur 5-9 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Den Helder ( $270^\circ$ ). Kwantiellijnen volgens GPV en volgens de transformatiemethode.

#### 5.1.4 Delfzijl

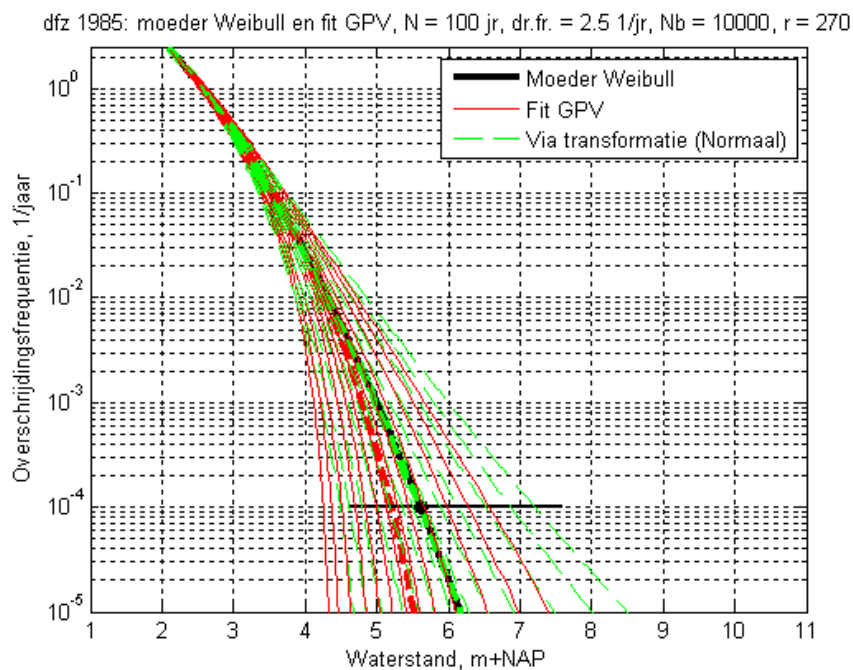
De resultaten voor Delfzijl staan in Figuur 5-10 t/m Figuur 5-11. Merk op dat de gefitte GPV's net als voor Den Helder voor de hogere kwantielen ver onder de moederverdeling liggen. De resultaten volgens de transformatie hebben als gemiddelde, afgezien van een kleine bias, wel weer de moederverdeling.



Figuur 5-10 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Delfzijl (omni). Kwantiellijnen volgens GPV en volgens de transformatiemethode.



Figuur 5-11 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Delfzijl (300°). Kwantiellijnen volgens GPV en volgens de transformatiemethode.



Figuur 5-12 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. Delfzijl (270°). Kwantiellijnen volgens GPV en volgens de transformatiemethode.

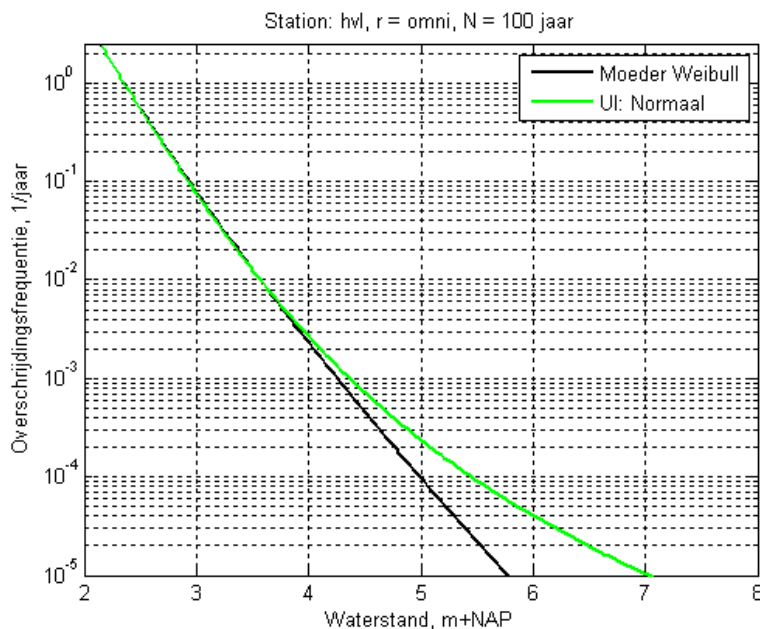
## 5.2 Effect uitintegreren onzekerheid

De volgende paragrafen geven het effect van het uitintegreren voor de hiervoor beschouwde stations (alleen omnidirectioneel). Omdat we de resultaten hier vergelijken met Hoek van Holland, wordt dat station als eerste gegeven.

### 5.2.1 Hoek van Holland

In paragraaf 4.3.4 is aangegeven hoe de onzekerheid kan worden uitgeïntegreerd. Het effect van het uitintegreren is te zien in Figuur 5-13. De zwarte lijn is de moederverdeling; de groene lijn is de uitgeïntegreerde versie, waarbij voor  $w(\gamma)$  de normale verdeling is genomen met de parameters volgens paragraaf 4.6.

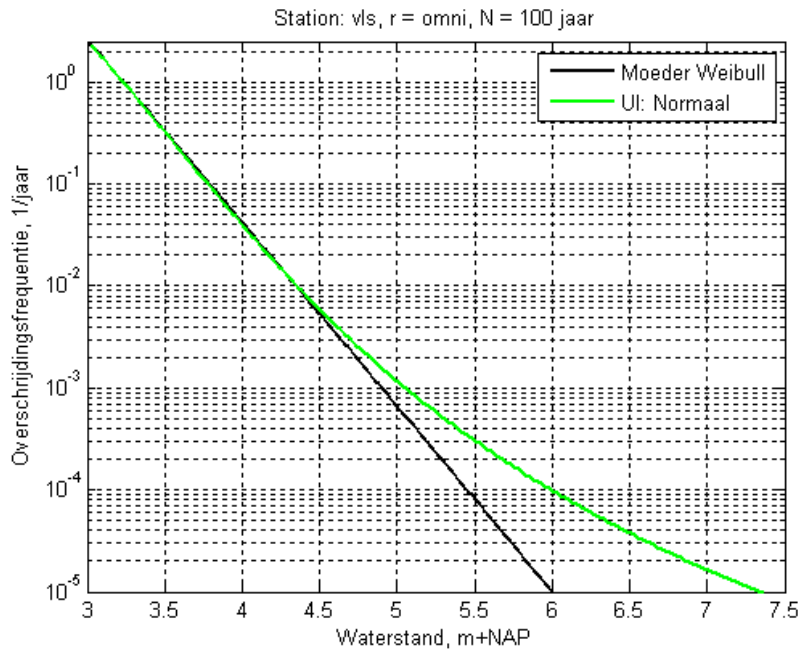
De conclusie is dat het  $10^{-4}$ -kwantiel door het uitintegreren circa 0.45 m omhoog gaat. De toename van het  $10^{-5}$ -kwantiel is veel groter: dat neemt toe met circa 1.25 m.



Figuur 5-13 Effect van het uitintegreren van onzekerheden, Hoek van Holland (omni). Kansverdeling voor  $\gamma$  is de normale verdeling.

### 5.2.2 Vlissingen

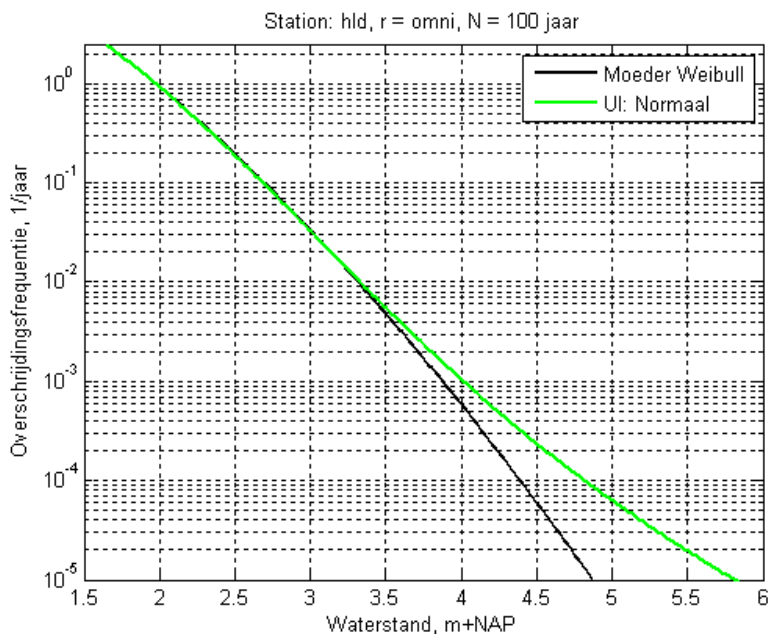
De resultaten voor het uitintegreren voor Vlissingen staan in Figuur 5-16. Door uitintegreren wordt het  $10^{-4}$ -kwantiel hier circa 0.55 m hoger. De toename van het  $10^{-5}$ -kwantiel is circa 1.35 m. Deze toenames zijn iets groter dan die voor Hoek van Holland (resp. 0.45 en 1.25 m).



Figuur 5-14 Effect van het uitintegreren van onzekerheden, Vliissinge (omni). Kansverdeling voor  $\gamma$  is de normale verdeling.

### 5.2.3 Den Helder

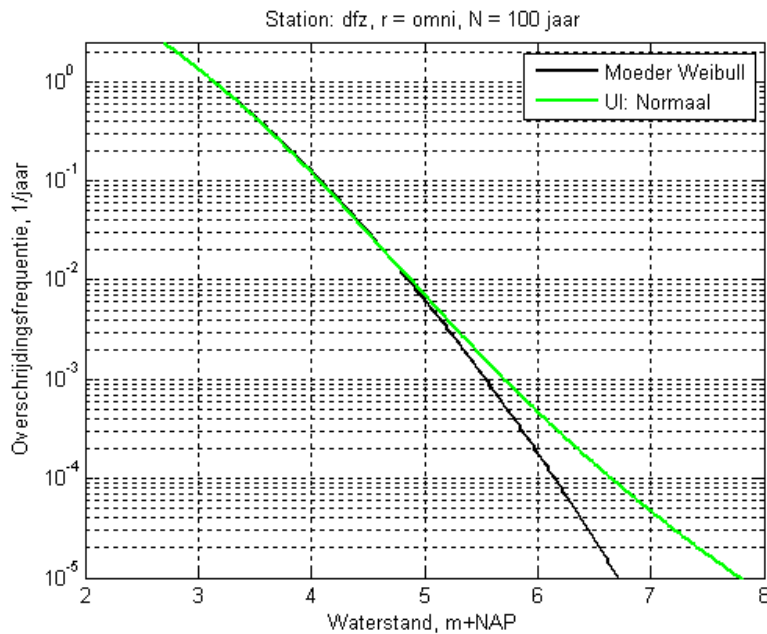
De resultaten voor het uitintegreren voor Den Helder staan in Figuur 5-16. Door uitintegreren wordt het  $10^{-4}$ -kwantiel hier, net als voor Hoek van Holland, circa 0.45 m hoger. De toename van het  $10^{-5}$ -kwantiel is circa 1.1 m, wat iets minder is dan voor Hoek van Holland.



Figuur 5-15 Effect van het uitintegreren van onzekerheden, Den Helder (omni). Kansverdeling voor  $\gamma$  is de normale verdeling.

## 5.2.4 Delfzijl

De resultaten voor het uitintegreren voor Delfzijl staan in Figuur 5-16. Door uitintegreren wordt het  $10^{-4}$ -kwantiel hier, net als voor Hoek van Holland, circa 0.45 m hoger. De toename van het  $10^{-5}$ -kwantiel is circa 1.1 m, wat iets minder is dan voor Hoek van Holland.



Figuur 5-16 Effect van het uitintegreren van onzekerheden, Delfzijl (omni). Kansverdeling voor  $\gamma$  is de normale verdeling.



## 6 Aanpak IJsselmeergebied

Voor het IJssel- en Markermeer moeten ook BI's worden bepaald. Voor deze meren kan dezelfde aanpak worden gevolgd als voor de kuststations. Wel moet dan worden onderzocht wat een juiste keuze voor de kansdichtheid  $w(\gamma)$  is.

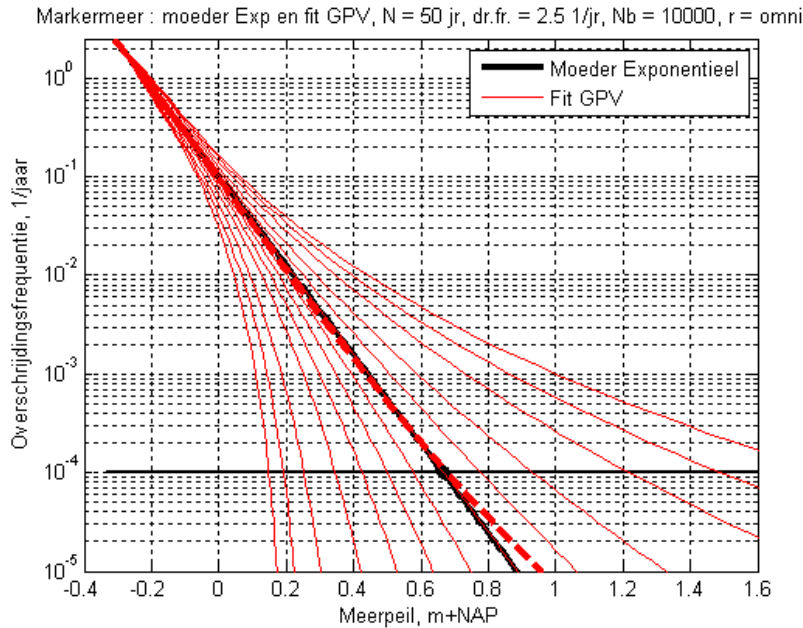
Omdat voor het IJssel- en Markermeer slechts metingen beschikbaar zijn vanaf 1975, bestaat de meetreeks voor deze meren uit circa 40 jaar. Wel zijn synthetische meerpeilen bepaald vanaf 1951 [Meurs Van et al, 2014]. Dus kan ook worden uitgegaan van een meetreeks van circa 60 jaar. Deze synthetische metingen zijn echter vooral voor het Markermeer minder betrouwbaar; zie bijvoorbeeld paragraaf 5.2 uit [Geerse en Wojciechowska, 2013] voor een bespreking daarvan. Dan lijkt een redelijke keuze om uit te gaan van de kansdichtheid  $w(\gamma)$  gebaseerd op  $N = 50$  jaar. Hierna zal blijken dat dan onwaarschijnlijk brede BI's resulteren, reden waarom toch van een andere meetperiode wordt uitgegaan voor het bepalen van de BI's, zie verder hierover onderstaande paragrafen.

We merken nog op dat de transformatie van de exponentiële stochast  $X$  naar het meerpeil  $M$  voor de meren anders dient te worden uitgevoerd dan beschreven in paragraaf 4.3.1, omdat de overschrijdingsfrequentie van het meerpeil niet wordt beschreven door een Weibullverdeling, maar door een stuksgewijs exponentiële verdeling voor het IJsselmeer, en een (volledig) exponentiële verdeling voor het Markermeer. De transformaties blijken dan stuksgewijs lineair (IJsselmeer) of lineair (Markermeer).

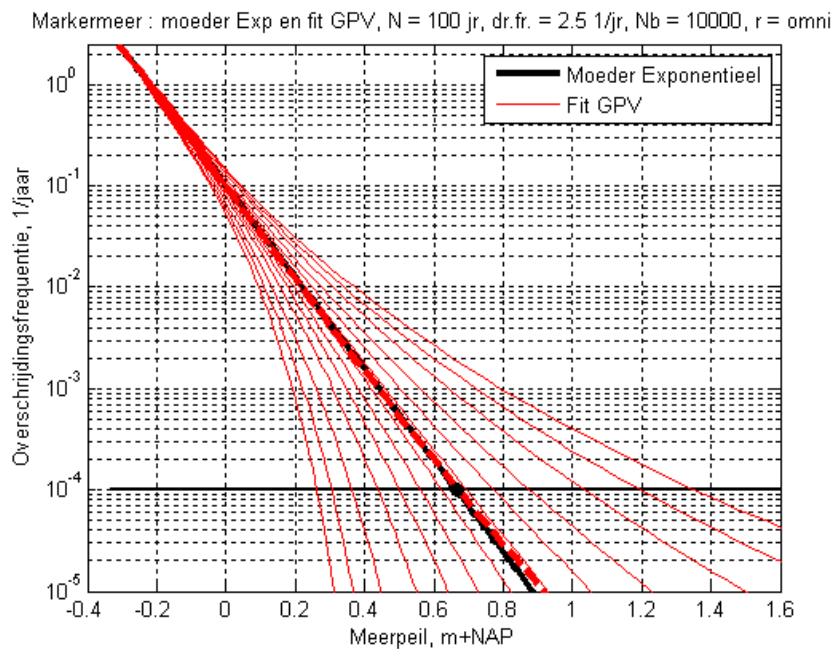
## 6.1 Markermeer

### 6.1.1 Keuzes betrouwbaarheidsintervallen

Voor het Markermeer is de vigerende frequentielijn een exponentiële frequentieverdeling. Hieruit zijn, analoog aan Figuur 3-2 voor Hoek van Holland, trekkingen verricht, voor  $N = 50$  en  $N = 100$  jaar (Figuur 6-1 en Figuur 6-2).



Figuur 6-1 Moederverdeling: vigerende frequentielijn; fit: GPV. Markermeer. Kwantiellijnen volgens GPV,  $N = 50$  jaar.



Figuur 6-2 Moederverdeling: vigerende frequentielijn; fit: GPV. Markermeer. Kwantiellijnen volgens GPV,  $N = 100$  jaar.

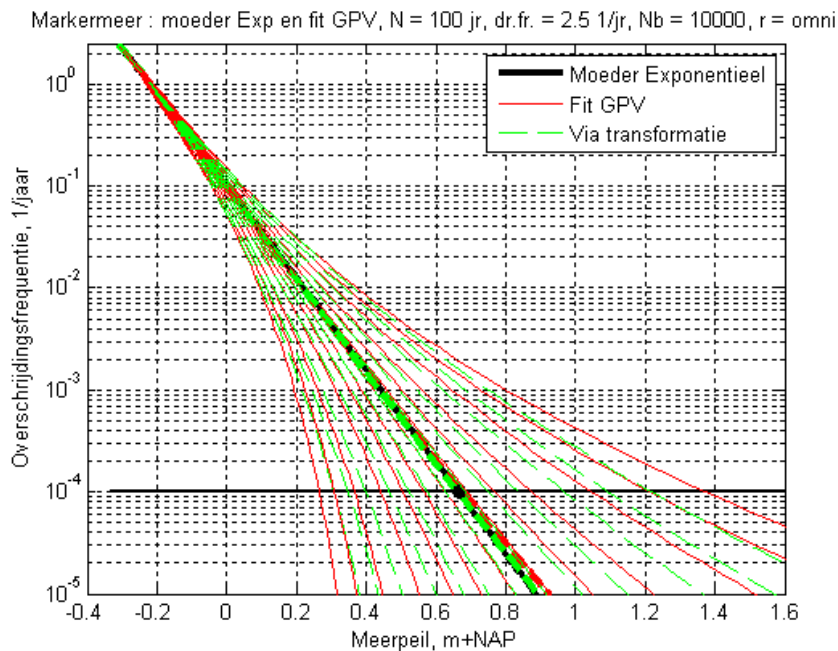
Ons inziens wordt de onzekerheid bij beschouwen van  $N = 50$  jaar sterk overdreven. Daarbij wordt nog het volgende opgemerkt. Het hoogst gemeten Markermeerpeil is gelijk aan 0.19 m+NAP, dat voorkomt in de meetperiode 01-01-1976 t/m 31-12-2007 [Geerse, 2008]. Bij het afstemmen van de onzekerheid op  $N = 50$  jaar komt deze 0.19 m+NAP – die deel uitmaakt van slechts circa 30 meetjaren – dan al voor in het 95%-BI van het  $10^{-4}$ -kwantiel (dat BI heeft als ondergrens 0.15 m+NAP). Het is veel logischer dat het gehele 95%-BI bóven de hoogst gemeten waarde 0.19 m+NAP ligt, wat wel het geval is bij afstemmen van de onzekerheid op  $N = 100$  jaar.

In het vervolg wordt uitgegaan van de onzekerheid op basis van  $N = 100$  jaar. Daarbij wordt een normale verdeling voor  $w(\gamma)$  genomen met parameters:

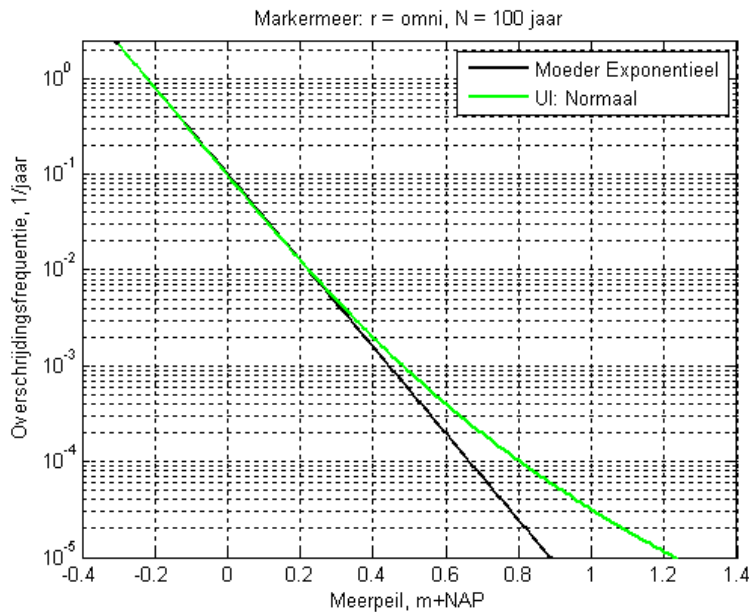
$$\begin{aligned}\mu &= -0.007735 \\ \sigma &= 0.04614\end{aligned}\quad (5.1)$$

N.B. Dit betreft waarden waarbij is gecorrigeerd voor de bias in de kwantielen.

De BI's op basis van de keuzes (5.1) voor  $w(\gamma)$  worden getoond in Figuur 6-3. Figuur 6-4 laat het effect van het uitintegreren zijn: het  $10^{-4}$ -kwantiel neemt daardoor toe met 0.15 m, terwijl het  $10^{-5}$ -kwantiel toeneemt met 0.35 m.



Figuur 6-3 Moederverdeling: vigerende frequentielijn; fit: GPV. Markermeer. Kwantiellijnen volgens GPV en volgens de transformatiemethode. Afgestemd op meetperiode  $N = 100$  jaar.



Figuur 6-4 Effect van het uitintegreren van onzekerheden, Markermeer. Kansverdeling voor  $\gamma$  is de normale verdeling, die is afgestemd op meetperiode 100 jaar.

### 6.1.2 Eindtabel Markermeer

Hieronder staat de eindtabel voor het Markermeer, waarvan de gegevens eenzelfde interpretatie hebben als de omnidirectionele gegevens uit Tabel 4-1 voor Hoek van Holland. De resultaten spreken voor zich.

| $\mu = -0.0077351$ $\sigma = 0.04614$ |      | Grenzen betrouwbaarheidsintervallen bij gegeven percentages |       |       |       |       |       |       |      |      |      |      |      |      |       |
|---------------------------------------|------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|-------|
| r = omni                              | Exp. | Gem. TR   | 2.5%  | 5%    | 10%   | 20%   | 30%   | 40%   | 50%  | 60%  | 70%  | 80%  | 90%  | 95%  | 97.5% |
| 10                                    | 0.00 | 0.00  | -0.04 | -0.04 | -0.03 | -0.02 | -0.01 | -0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05  |
| 100                                   | 0.22 | 0.22  | 0.10  | 0.12  | 0.14  | 0.16  | 0.18  | 0.19  | 0.21 | 0.23 | 0.25 | 0.27 | 0.31 | 0.34 | 0.36  |
| 1000                                  | 0.44 | 0.44  | 0.22  | 0.24  | 0.28  | 0.32  | 0.36  | 0.39  | 0.42 | 0.46 | 0.49 | 0.54 | 0.62 | 0.69 | 0.75  |
| 10000                                 | 0.67 | 0.66  | 0.31  | 0.35  | 0.40  | 0.47  | 0.52  | 0.58  | 0.63 | 0.69 | 0.75 | 0.84 | 0.97 | 1.09 | 1.22  |
| 100000                                | 0.89 | 0.89  | 0.38  | 0.43  | 0.50  | 0.60  | 0.68  | 0.75  | 0.83 | 0.92 | 1.02 | 1.15 | 1.36 | 1.57 | 1.78  |

Tabel 6-1 Eindtabel Markermeer.

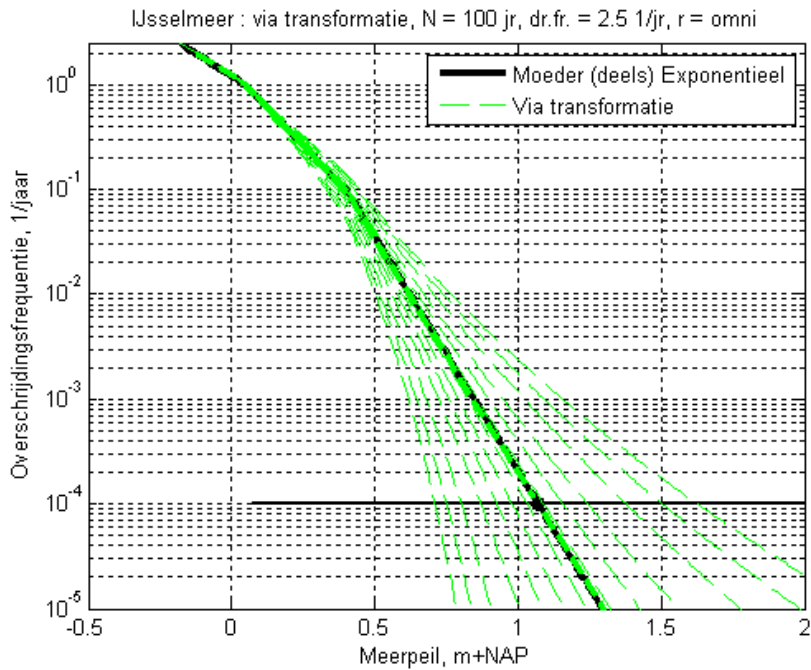
## 6.2 IJsselmeer

### 6.2.1 Keuzes betrouwbaarheidsintervallen

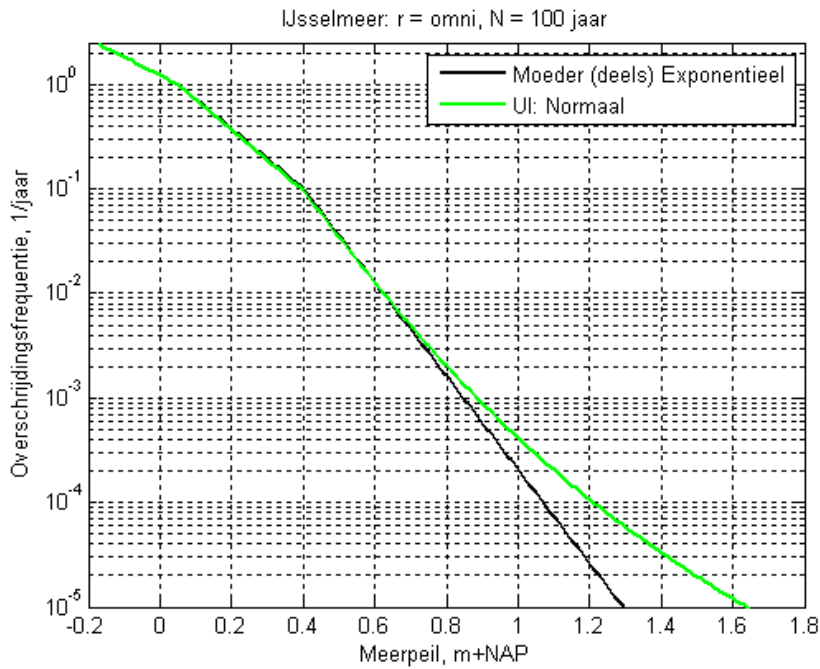
Voor het IJsselmeer kan moeilijk worden uitgegaan van een moederverdeling waaraan een GPV wordt gefit. Reden daarvan is dat de vigerende frequentieverdeling knikken vertoont. Daaraan kan niet zinvol een GPV worden gefit.

Er is gekozen voor dezelfde aanpak als voor het Markermeer, met onzekerheden afgestemd op  $N = 100$  jaar. De resultaten voor de transformatie staan in Figuur 6-5, en die voor het uitintegreren in Figuur 6-6. De effecten van het uitintegreren stemmen redelijk overeen met die voor het Markermeer: het  $10^{-4}$ -kwantiel neemt toe met 0.15 m, het  $10^{-5}$ -kwantiel met ruim 0.35 m.

Ons inziens ogen de resultaten plausibel. In de volgende paragraaf wordt de onzekerheid voor het IJsselmeer ook nog eens vergeleken met resultaten volgens een 'gevoeligheidsmodel' voor het IJsselmeer.



Figuur 6-5 Moederverdeling: Weibull; fit: GPV. IJsselmeer. Kwantiellijnen volgens de transformatiemethode. Afgestemd op N = 100 jaar.



Figuur 6-6 Effect van het uitintegreren van onzekerheden, IJsselmeer. Kansverdeling voor  $\gamma$  is de normale verdeling.

## 6.2.2 Eindtabel IJsselmeer

Hieronder staat de eindtabel voor het IJsselmeer. De resultaten spreken voor zich.

| $\mu = -0.0077351$ $\sigma = 0.04614$ |      |         | Grenzen betrouwbaarheidsintervallen bij gegeven percentages |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |       |  |
|---------------------------------------|------|---------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|--|
| r = omni                              | Exp. | Gem. TR | 2.5%  | 5%   | 10%  | 20%  | 30%  | 40%  | 50%  | 60%  | 70%  | 80%  | 90%  | 95%  | 97.5% |  |
| 10                                    | 0.40 | 0.39    | 0.33  | 0.34 | 0.35 | 0.37 | 0.38 | 0.39 | 0.39 | 0.40 | 0.41 | 0.42 | 0.43 | 0.44 | 0.45  |  |
| 100                                   | 0.62 | 0.62    | 0.50  | 0.52 | 0.54 | 0.56 | 0.58 | 0.60 | 0.61 | 0.63 | 0.65 | 0.67 | 0.71 | 0.74 | 0.77  |  |
| 1000                                  | 0.85 | 0.84    | 0.62  | 0.65 | 0.68 | 0.72 | 0.76 | 0.79 | 0.82 | 0.86 | 0.90 | 0.95 | 1.02 | 1.09 | 1.16  |  |
| 10000                                 | 1.07 | 1.07    | 0.71  | 0.75 | 0.80 | 0.87 | 0.93 | 0.98 | 1.03 | 1.09 | 1.16 | 1.24 | 1.38 | 1.50 | 1.63  |  |
| 100000                                | 1.29 | 1.30    | 0.78  | 0.84 | 0.91 | 1.00 | 1.08 | 1.16 | 1.24 | 1.32 | 1.43 | 1.56 | 1.78 | 1.99 | 2.19  |  |

Tabel 6-2 Eindtabel IJsselmeer.

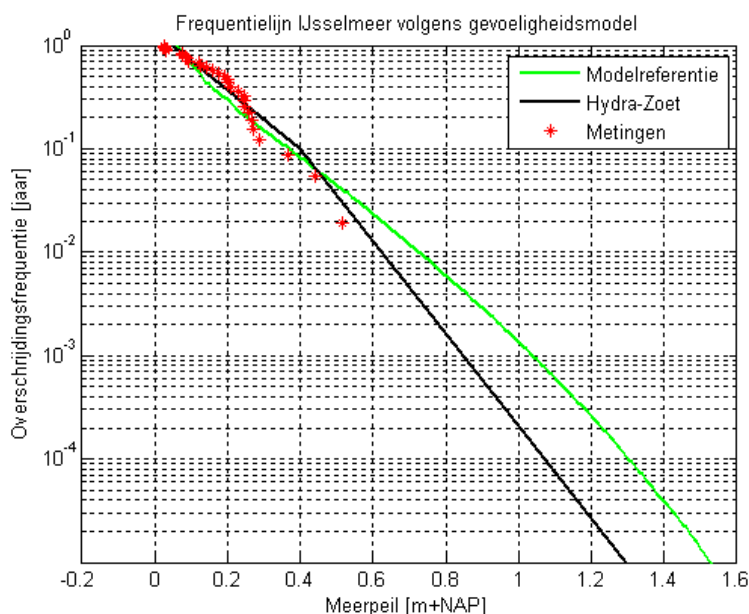
## 6.3 Gevoeligheidsmodel frequentielijn IJsselmeer

Recent is een probabilistisch model ontwikkeld door HKV [Dulfer et al, 2014], waarbij de frequentielijn van het IJsselmeer wordt uitgerekend op basis van de volgende stochasten:

- IJsselafvoer te Olst.
- Vechtafvoer Dalfsen en overige lozingen op IJsselmeer (versimpeld gekoppeld aan Olst).
- Waterstand Waddenzee inclusief windopzet.
- Wind boven IJsselmeer.

Het spuien bij de Afsluitdijk wordt beschreven met een overlaatformule, die echter nog dient te worden afgeregeld. Ook dienen overige statistische gegevens nog te worden verfijnd.

De resultaten van het gevoeligheidsmodel staan in Figuur 6-7. Daarin zijn ook metingen weergegeven uit de periode 1976 t/m 2005 en de vigerende frequentielijn, beschreven in [Geerse, 2006]. Merk op dat de groene lijn volgens het model boven de vigerende frequentielijn ligt. Er wordt nog eens met nadruk gesteld dat hier geen conclusies aan verbonden mogen worden, omdat het gevoeligheidsmodel nog moet worden afgeregeld.



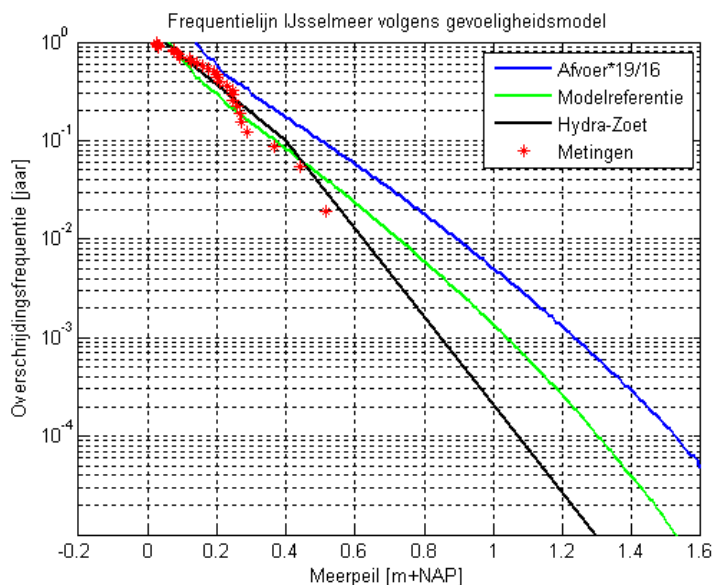
Figuur 6-7 Frequentielijn IJsselmeer, zoals bepaald met het gevoeligheidsmodel (groene lijn).

Met het gevoeligheidsmodel kan de onzekerheid in de afvoer te Olst worden vertaald naar de onzekerheid in de meerpeilstatistiek. N.B. De afvoer te Olst is het meest bepalend voor de

statistiek van het IJsselmeer; veel meer dan de statistiek voor de waterstanden op de Waddenzee en de wind.

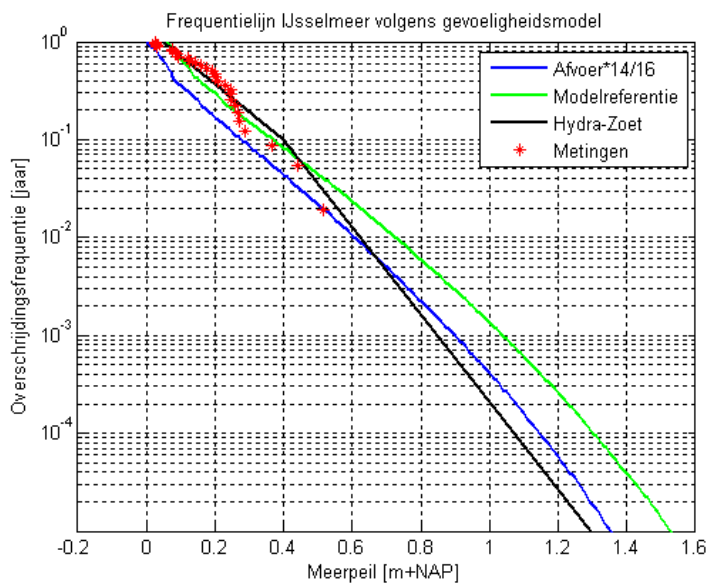
Gewoonlijk wordt als bovengrens voor het 95%-BI voor Lobith een waarde van circa 19000 m<sup>3</sup>/s aangenomen, wat 3000 m<sup>3</sup>/s boven de maatgevende afvoer van 16000 m<sup>3</sup>/s ligt. Laten we hier als ondergrens van het 95%-BI 14000 m<sup>3</sup>/s aanhouden (2/3 van 3000 m<sup>3</sup>/s onder de maatgevende afvoer). T.o.v. de maatgevende afvoer corresponderen deze onder- en bovengrens dan met factoren 14/16 en 19/16. Als gevoeligheidsonderzoek voor de invloed van de afvoer op de frequentielijn voor het IJsselmeer wordt de afvoer (IJssel + Vecht) dan respectievelijk vermenigvuldigd met 14/16 en 19/16. Het resultaat daarvan staat in Figuur 6-8 en Figuur 6-9.<sup>13</sup>

Het blijkt dat het 10<sup>-4</sup>-kwantiel voor de verlaagde afvoeren dan 15 cm omlaag gaat, terwijl dat voor de verhoogde afvoeren dan 23 cm omhoog gaat. Zoals gezegd betreft het hier een gevoeligheidsmodel, dat geen absoluut juiste antwoorden geeft. Maar dit model geeft wel de indruk dat de onzekerheid volgens Figuur 6-5, die feitelijk is afgestemd op een (fictieve) meetperiode van 100 jaar, een redelijke keuze vormt. Als namelijk voor een grotere onzekerheid wordt gekozen, levert dat veel meer onzekerheid dan op basis van Figuur 6-8 en Figuur 6-9 moet worden verwacht. N.B. Dat laatste geldt omdat (expert judgement) de afvoer op het IJsselmeer de meest bepalende factor is voor de frequentielijn van het IJsselmeer, zodat een gevoeligheidsonderzoek met variërende afvoer een redelijke inschatting oplevert voor de onzekerheid in de frequentielijn.



*Figuur 6-8* Frequentielijn IJsselmeer met verhoogde afvoeren; Olst en Vechtafvoer vermenigvuldigd met factor 19/16.

<sup>13</sup> Bij gebruik van deze vermenigvuldigingsfactoren worden ook de lage afvoeren met deze factoren vermenigvuldigd, hoewel dat niet reëel is. Bij het beoordelen van de resultaten uit Figuur 6-8 en Figuur 6-9 moet daarom alleen naar extreme meerpeilen worden gekeken, zeg vanaf overschrijdingsfrequentie 10<sup>-3</sup> per jaar.



Figuur 6-9 Frequentielijn IJsselmeer met verlaagde afvoeren; Olst en Vechtafvoer vermenigvuldigd met factor 14/16.



## 7 Conclusies en aanbevelingen

Het doel van dit onderzoek is het bepalen van betrouwbaarheidsintervallen (BI's) voor de kwantielen van de overschrijdingsfrequenties voor een aantal kuststations en het IJsselmeergebied (IJssel- en Markermeer). Voor acht kuststations dienen omnidirectionele en de relevante directionele verdelingen te worden beschouwd (sectoren 210° - 360°). Ook dienen kentallen te worden gegeven om de BI's te kunnen bepalen.

### 7.1 Gevolgde werkwijze

#### 7.1.1 BI's in de basispeilen

Dit rapport vat eerst samen hoe indertijd bij het afleiden van de basispeilen BI's zijn bepaald [Dillingh et al, 1993a; 1993b], [Van Urk, 1993]. Daarbij werd onder meer gebruik gemaakt van een bootstrapmethode, waarbij uit een GPV-moederverdeling trekkingen zijn verricht. Eén bootstrap correspondeert dan met een hele reeks van trekkingen uit de moederverdeling, waarbij deze reeks correspondeert met een beschouwd aantal meetjaren. Aan deze bootstraptrekkingen kan een verdeling worden gefit. In de basispeilen is o.m. de GPV als fitverdeling gebruikt. Bij het uitvoeren van  $N_b$  bootstraps resulteren dan  $N_b$  gefitte verdelingen. Voor elk van deze verdeling kunnen kwantielen worden bepaald. Per beschouwde overschrijdingsfrequentie resulteert dat in  $N_b$  kwantielen. Als  $N_b$  groot is, bijvoorbeeld  $N_b = 10^4$ , geven deze kwantielen informatie over (bijvoorbeeld) het 95%-BI bij de beschouwde overschrijdingsfrequentie.

#### 7.1.2 Gevoeligheidsonderzoek kust

In dit onderzoek is vervolgens een gevoeligheidsonderzoek uitgevoerd voor de kuststations Hoek van Holland en Delfzijl, met een soortgelijke bootstrapmethode als in de basispeilen werd gebruikt. Daarbij zijn als moederverdeling (vooral) de vigerende Weibullverdelingen gebruikt, omnidirectioneel en directioneel, maar dan omgerekend naar zichtjaar 1985. Als fitverdelingen zijn beschouwd: de Weibullverdeling, de GPV en de exponentiële verdeling. Daarbij bleek dat de keuze van de fitverdeling grote invloed heeft op de resultaten: bij gebruik van de Weibull- en de exponentiële verdeling resulteren veel smallere BI's dan bij de GPV als fitverdeling. Ons inziens kan de GPV, die ook een officiële limietverdeling betreft, het beste dienen om BI's af te leiden.

Met de GPV als fitverdeling is vervolgens onderzocht hoe keuzes in de bootstrapmethode – voor meetperiode en drempelfrequentie – doorwerken op de uiteindelijke BI's. Die invloed bleek erg groot. Zie voor detailconclusies en gemaakte keuzes daarover paragraaf 3.8.

#### 7.1.3 Methode voor bepalen BI's en eindtabellen

De kern van de methode uit dit onderzoek is dat eerst met de bootstrapmethode BI's worden bepaald voor een *exponentiële* moederverdeling, door daaraan een klasse van GPV's te fitten. Daarna wordt een transformatie gebruikt om deze BI's – die dus horen bij een exponentiële (moeder)verdeling – om te vormen tot BI's die horen bij de Weibullverdelingen voor de kust of de (stuksgewijs) exponentiële frequentieverdelingen voor het IJssel- en Markermeer.

Het uiteindelijke resultaat van de methode is dat per station BI's kunnen worden bepaald door gebruik te maken van een normale kansdichtheid  $w(\gamma)$  met parameters  $\mu_w$  en  $\sigma_w$ , in combinatie met de vigerende statistische parameters van het station; voor de kuststations zijn dat Weibull-parameters. De parameters  $\mu_w$  en  $\sigma_w$  zijn stationsafhankelijk, maar voor de kuststations wel gelijk voor de directionele en omnidirectionele Weibulls van dat station. De normale kansdichtheid  $w(\gamma)$  heeft hier betrekking op de vormparameter  $\gamma$  van de standaard-GPV (de GPV uit (4.7) met locatieparameter  $\theta_0 = 0$  schaalparameter  $\sigma_0 = 1$ ).<sup>14</sup>

De procedure om voor de kuststations bij gegeven parameters  $\mu_w$  en  $\sigma_w$  BI's te bepalen is samengevat in paragraaf 4.4. Per station is daarna een eindtabel gemaakt, waarin voor verschillende overschrijdingsfrequenties BI's worden gegeven, voor meerdere betrouwbaarheidspercentages (o.m. het 95%-BI en het 90%-BI). Deze eindtabellen zijn voor de acht beschouwde kuststations gegeven in Bijlage B. Die tabellen bevatten per station ook de gebruikte  $\mu_w$  en  $\sigma_w$ .

De procedure voor de meren is analoog aan die voor de kuststations. Eindtabellen voor IJssel- en Markermeer staan in paragraaf 6.1.2 en 6.2.2, waarbij ook weer de benodigde  $\mu_w$  en  $\sigma_w$  zijn gegeven.

## 7.2 Algemene bevindingen

Gedurende dit onderzoek is gebleken dat – in lijn met wat de literatuur daarover zegt – de aard van de BI's zeer sterk afhangt van allerlei uitgangspunten in de bepaling daarvan. De BI's zoals bepaald in dit onderzoek berusten daarmee op allerlei (subjectieve) uitgangspunten. Wel zijn deze uitgangspunten zo goed mogelijk toegelicht, zie daarover met name paragraaf 3.8 en 4.6.

Hieronder wordt volstaan met enkele algemene bevindingen voor de kuststations en de meren.

### 7.2.1 Kuststations

Voor zichtjaar 1985 geldt het volgende:

1. Het 95%-BI voor het  $10^{-4}$ -kwantiel van Hoek van Holland is (afgeronde getallen):

$$[3.8 \text{ m+NAP}, 7.0 \text{ m+NAP}] = [5.00 - 1.2 \text{ m+NAP}, 5.00 + 2.0 \text{ m+NAP}].$$

2. De 95%-BI's voor de  $10^{-4}$ -kwantielen van de zuidwestelijke stations Vlissingen, OS11 en IJmuiden Buiten zijn qua breedte redelijk vergelijkbaar, terwijl smallere BI's resulteren voor de noordelijke stations (Den Helder, Harlingen, Lauwersoog, Delfzijl).

Dat laatste hangt samen met het feit dat de kromming van de frequentielijnen van de noordelijke stations verschilt met die van de zuidelijke: noordelijke stations hebben een kromming 'naar beneden', terwijl zuidelijke stations geen kromming hebben of een kromming naar boven.<sup>15</sup>

<sup>14</sup> Elders in dit rapport wordt niet gesproken over de standaard-GPV, omdat in dat stadium nog een meer algemene situatie werd beschouwd met  $\theta_0$  en  $\sigma_0$  ongelijk aan 0 en 1.

<sup>15</sup> Een kromming naar boven betekent een neiging 'richting extremere waterstanden', en een kromming naar beneden een neiging naar 'minder extreme waterstanden'; zie voor details paragraaf 4.6.2. N.B. Eventuele fysische verklaringen daarvoor vallen buiten de scope van dit onderzoek.

3. Op grond van de bepaalde BI's kan worden berekend in welke mate het 'uitintegreren van onzekerheid' de vigerende frequentielijnen doet veranderen. Voor de omnidirectionele verdelingen van Vlissingen, Hoek van Holland, Den Helder en Delfzijl is dat berekend: door uitintegreren neemt het  $10^{-4}$ -kwantiel toe met circa 0.45 m, terwijl het  $10^{-5}$ -kwantiel veel meer toeneemt, met 1.1 tot 1.3 m.
4. Het is de bedoeling t.b.v. de WTI2017 in Hydra-Ring onzekerheden mee te nemen. In dit onderzoek afgeleide BI's kunnen worden gebruikt bij de implementatie daarvan. Wel wordt nog eens benadrukt dat de resulterende BI's uit dit onderzoek sterk afhangen van allerlei keuzes in het bepalen daarvan. Ook zijn bij de afleiding geen fysische overwegingen betrokken; denkbaar is dat de bovengrenzen van de BI's voor de hogere overschrijdingsfrequenties ( $10^{-4}$  en met name  $10^{-5}$  per jaar), fysisch gezien onmogelijk zijn. Daarom moeten in dit onderzoek afgeleide BI's worden opgevat als *voorstellingen* voor de uiteindelijk in Hydra-Ring op te nemen onzekerheden.

## 7.2.2 IJssel- en Markermeer

Hiervoor worden de volgende conclusies getrokken:

1. Voor het 95%-BI voor het  $10^{-4}$ -kwantiel geldt (afgeronde getallen):
  - a. Voor het Markermeer:  
 $[0.31 \text{ m+NAP}, 1.22 \text{ m+NAP}] = [0.66 - 0.35 \text{ m+NAP}, 0.66 + 0.56 \text{ m+NAP}]$ .
  - b. Voor het IJsselmeer:  
 $[0.71 \text{ m+NAP}, 1.63 \text{ m+NAP}] = [1.07 - 0.36 \text{ m+NAP}, 1.07 + 0.56 \text{ m+NAP}]$ .
2. Voor deze meren is het effect van het uitintegreren op de kwantielen vergelijkbaar: het  $10^{-4}$ -kwantiel neemt toe met 0.15 m, het  $10^{-5}$ -kwantiel met ruim 0.35 m.
3. Net als voor de kust zijn voor de meren geen fysische overwegingen betrokken bij het bepalen van de BI's. Denkbaar is dat de hiervoor genoemde 95%-BI's bovengrenzen hebben die fysisch ondenkbaar zijn. Daarbij wordt wel opgemerkt dat voor het IJsselmeer inmiddels een gevoeligheidsmodel bestaat (zie paragraaf 6.3), op basis waarvan voor dit meer de bovengrens van 1.63 m+NAP fysisch reëel lijkt. Wel dient dit gevoeligheidsmodel nog te worden gevalideerd.



## Referenties

[Dillingh et al, 1993a]

De basispeilen langs de Nederlandse kust. Statistisch onderzoek. Deel 1 - Tekst. D. Dillingh, L. de Haan, R. Helmers, G.P. Können, J. van Malde. Rapport DGW - 93.023, 's Gravenhage, april 1993.

[Dillingh et al, 1993b]

De basispeilen langs de Nederlandse kust. Statistisch onderzoek. Deel 2 - Bijlagen. D. Dillingh, L. de Haan, R. Helmers, G.P. Können, J. van Malde. Rapport DGW - 93.023, 's Gravenhage, april 1993.

[Embrechts et al, 1999]

Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Paul Embrechts, Claudia Knuppelberg and Thomas Mikosch. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Corrected second printing, 1999.

[Geerse, 2006]

Hydraulische Randvoorwaarden 2006 Vecht- en IJsseldelta - Statistiek IJsselmeerpeil, afvoeren en stormverlopen voor Hydra-VIJ. C.P.M. Geerse. RIZA-werkdocument 2006.036x. Rijkswaterstaat-RIZA. Lelystad, januari 2006.

[Geerse, 2008]

Hydra-VIJ invoer Markermeer (herziene en uitgebreide versie van 9 oktober). C.P.M. Geerse. Memo PR1371.30. HKV Lijn in Water, Lelystad, 28 oktober 2008.

[Geerse en Wojciechowska, 2013]

Invloed ander streefpeilbeheer IJsselmeergebied in Deltamodel. Opzetten meerpeil in maart met pompen in Afsluitdijk, versus referentiescenario. PR2654.10. Chris Geerse en Karolina Wojciechowska. HKV Lijn in Water, december 2013.

[Meurs Van et al, 2014]

Fase 4 - Toets waterveiligheid. G.A.M. van Meurs, C.P.M. Geerse en Q. Gao. Kenmerk 1208527-000-VEB-0004. Deltares, januari 2014.

[Philippart et al, 1993]

De basispeilen langs de Nederlandse kust; Fysisch onderzoek. M.E. Philippart, D. Dillingh, S.T. Pwa., J.G. De Ronde; met bijdragen van: M. Soerdjballi, K. Doekes, A. Bavelaar, M. Groen. RIKZ-93.025. Rijkswaterstaat, april 1993.

[Philippart et al, 1995]

De basispeilen langs de Nederlandse kust; de ruimtelijke verdeling en overschrijdingskansen. Philippart M.E., D. Dillingh, S.T. Pwa. RIKZ-95.008. Rijkswaterstaat, mei 1995.

[Roskam et al, 2000]

Richtingsafhankelijke extreme-waarden voor HW-standen, golfhoogten en golfperioden. A.P. Roskam, J. Hoekema en J.J. Seiffert. Rapport RIKZ/2000.040. RIKZ Den Haag, december 2000.

[Smith, 1987]

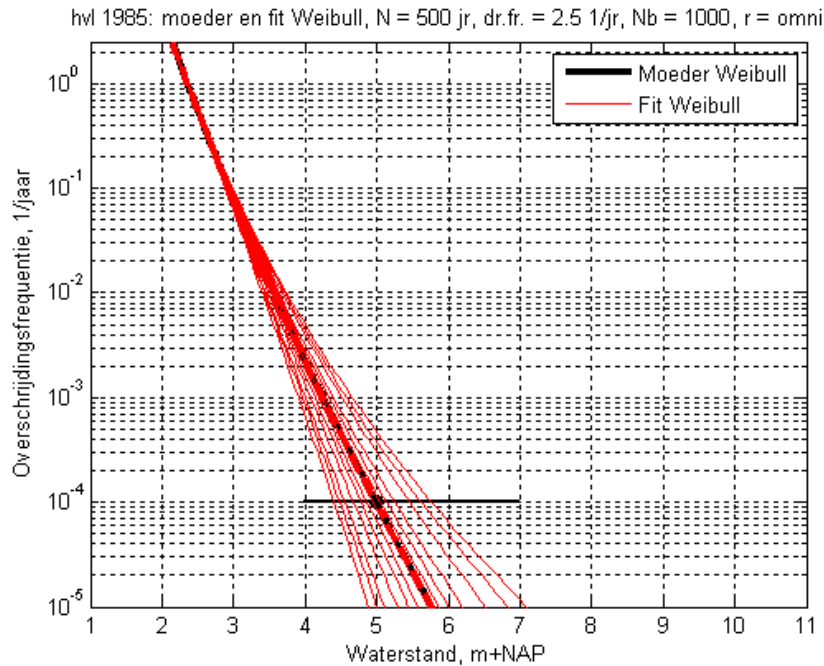
Estimating tails of probability distributions. Ann. Statist. 15, p 1174-1207.

[Van Urk, 1993]

De basispeilen langs de Nederlandse kust. Eindverslag van het onderzoek naar de kansen op extreem hoge waterstanden langs de Nederlandse Kust. A. Van Urk. Rapport DGW - 93.026, april 1993.

## Bijlage A Moeder- en fitverdeling Weibull, voor meetperiode 500 jaar.

In aanvulling op Figuur 3-1 uit paragraaf 3.2.1 volgt hier een soortgelijke figuur voor een langere meetperiode van 500 jaar. De bias blijkt nu nog slechts 0.01 m te zijn.



Figuur A-1. Resultaat voor moeder- en fitverdeling Weibull, voor meetperiode 500 jaar.





## Bijlage B Eindtabellen hoofdstations voor de kust

Deze bijlage geeft de eindtabellen voor de acht hoofdstations voor de kust, analoog aan Tabel 4-1 voor Hoek van Holland. Zie voor de betekenis van de gegevens paragraaf 4.6.

Achtereenvolgens zijn de tabellen gegeven voor:

- Vlissingen
- OS11
- Hoek van Holland
- IJmuiden Buitenhaven
- Den Helder
- Harlingen
- Lauwersoog
- Delfzijl

| $\mu = -0.013097$ $\sigma = 0.06$ |             | Grenzen betrouwbaarheidsintervallen bij gegeven percentages |             |           |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |              |  |
|-----------------------------------|-------------|---|-------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|--------------|--|
| r = omni                          | Wbl.        | Gem. TR   | 2.5%        | 5%        | 10%        | 20%        | 30%        | 40%        | 50%        | 60%        | 70%        | 80%        | 90%        | 95%        | 97.5%        |  |
| 10                                | 3.79        | 3.78  | 3.65        | 3.67      | 3.69       | 3.72       | 3.74       | 3.76       | 3.78       | 3.79       | 3.82       | 3.84       | 3.88       | 3.91       | 3.94         |  |
| 100                               | 4.35        | 4.32  | 3.96        | 4.01      | 4.07       | 4.14       | 4.20       | 4.25       | 4.30       | 4.36       | 4.42       | 4.49       | 4.61       | 4.72       | 4.82         |  |
| 1000                              | 4.90        | 4.87  | 4.20        | 4.27      | 4.37       | 4.50       | 4.61       | 4.71       | 4.81       | 4.92       | 5.04       | 5.20       | 5.46       | 5.69       | 5.92         |  |
| 10000                             | 5.45        | 5.44  | 4.37        | 4.48      | 4.62       | 4.81       | 4.98       | 5.14       | 5.30       | 5.48       | 5.69       | 5.97       | 6.43       | 6.87       | 7.32         |  |
| 100000                            | 6.00        | 6.03  | 4.50        | 4.63      | 4.82       | 5.08       | 5.31       | 5.53       | 5.77       | 6.04       | 6.36       | 6.80       | 7.55       | 8.30       | 9.08         |  |
| <b>r = 210</b>                    | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                | 2.90        | 2.89  | 2.83        | 2.84      | 2.85       | 2.86       | 2.87       | 2.88       | 2.89       | 2.90       | 2.91       | 2.92       | 2.94       | 2.95       | 2.97         |  |
| 100                               | 3.16        | 3.15  | 2.98        | 3.00      | 3.03       | 3.06       | 3.09       | 3.11       | 3.14       | 3.16       | 3.19       | 3.23       | 3.28       | 3.33       | 3.38         |  |
| 1000                              | 3.41        | 3.40  | 3.09        | 3.13      | 3.17       | 3.23       | 3.28       | 3.33       | 3.37       | 3.42       | 3.48       | 3.55       | 3.67       | 3.77       | 3.87         |  |
| 10000                             | 3.66        | 3.65  | 3.17        | 3.22      | 3.29       | 3.38       | 3.45       | 3.52       | 3.59       | 3.67       | 3.77       | 3.89       | 4.09       | 4.28       | 4.47         |  |
| 100000                            | 3.91        | 3.91  | 3.23        | 3.29      | 3.38       | 3.50       | 3.60       | 3.70       | 3.81       | 3.92       | 4.07       | 4.26       | 4.57       | 4.88       | 5.20         |  |
| <b>r = 240</b>                    | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                | 3.17        | 3.16  | 3.08        | 3.09      | 3.11       | 3.12       | 3.14       | 3.15       | 3.16       | 3.17       | 3.19       | 3.20       | 3.23       | 3.25       | 3.27         |  |
| 100                               | 3.52        | 3.51  | 3.28        | 3.31      | 3.35       | 3.39       | 3.43       | 3.46       | 3.49       | 3.53       | 3.56       | 3.61       | 3.68       | 3.75       | 3.81         |  |
| 1000                              | 3.86        | 3.84  | 3.43        | 3.48      | 3.54       | 3.62       | 3.68       | 3.74       | 3.80       | 3.87       | 3.94       | 4.03       | 4.18       | 4.32       | 4.45         |  |
| 10000                             | 4.18        | 4.16  | 3.54        | 3.60      | 3.69       | 3.80       | 3.90       | 3.99       | 4.09       | 4.19       | 4.32       | 4.47       | 4.73       | 4.97       | 5.21         |  |
| 100000                            | 4.49        | 4.49  | 3.61        | 3.70      | 3.81       | 3.96       | 4.10       | 4.23       | 4.36       | 4.51       | 4.69       | 4.93       | 5.33       | 5.72       | 6.11         |  |
| <b>r = 270</b>                    | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                | 3.44        | 3.43  | 3.32        | 3.33      | 3.35       | 3.38       | 3.40       | 3.41       | 3.43       | 3.45       | 3.47       | 3.49       | 3.52       | 3.55       | 3.57         |  |
| 100                               | 3.93        | 3.91  | 3.60        | 3.64      | 3.69       | 3.75       | 3.80       | 3.85       | 3.89       | 3.94       | 3.99       | 4.06       | 4.16       | 4.25       | 4.33         |  |
| 1000                              | 4.40        | 4.37  | 3.80        | 3.87      | 3.95       | 4.06       | 4.15       | 4.24       | 4.32       | 4.41       | 4.52       | 4.65       | 4.86       | 5.06       | 5.24         |  |
| 10000                             | 4.86        | 4.84  | 3.95        | 4.04      | 4.16       | 4.33       | 4.47       | 4.60       | 4.73       | 4.88       | 5.05       | 5.28       | 5.65       | 6.00       | 6.35         |  |
| 100000                            | 5.30        | 5.31  | 4.06        | 4.18      | 4.33       | 4.55       | 4.74       | 4.93       | 5.12       | 5.34       | 5.60       | 5.95       | 6.52       | 7.10       | 7.68         |  |
| <b>r = 300</b>                    | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                | 3.58        | 3.56  | 3.42        | 3.44      | 3.46       | 3.49       | 3.52       | 3.54       | 3.56       | 3.58       | 3.60       | 3.63       | 3.67       | 3.71       | 3.74         |  |
| 100                               | 4.18        | 4.15  | 3.77        | 3.82      | 3.88       | 3.95       | 4.02       | 4.07       | 4.13       | 4.18       | 4.25       | 4.33       | 4.45       | 4.56       | 4.66         |  |
| 1000                              | 4.75        | 4.71  | 4.02        | 4.10      | 4.20       | 4.34       | 4.45       | 4.55       | 4.65       | 4.76       | 4.89       | 5.05       | 5.30       | 5.53       | 5.75         |  |
| 10000                             | 5.30        | 5.27  | 4.20        | 4.31      | 4.46       | 4.66       | 4.83       | 4.98       | 5.15       | 5.32       | 5.53       | 5.80       | 6.23       | 6.64       | 7.04         |  |
| 100000                            | 5.83        | 5.82  | 4.33        | 4.48      | 4.66       | 4.93       | 5.16       | 5.38       | 5.61       | 5.86       | 6.17       | 6.58       | 7.25       | 7.91       | 8.58         |  |
| <b>r = 330</b>                    | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                | 3.42        | 3.41  | 3.26        | 3.28      | 3.30       | 3.34       | 3.36       | 3.38       | 3.40       | 3.43       | 3.45       | 3.48       | 3.52       | 3.56       | 3.59         |  |
| 100                               | 4.05        | 4.02  | 3.62        | 3.67      | 3.74       | 3.82       | 3.88       | 3.94       | 4.00       | 4.06       | 4.13       | 4.21       | 4.34       | 4.45       | 4.56         |  |
| 1000                              | 4.65        | 4.61  | 3.88        | 3.97      | 4.08       | 4.22       | 4.33       | 4.44       | 4.55       | 4.66       | 4.79       | 4.96       | 5.22       | 5.46       | 5.69         |  |
| 10000                             | 5.22        | 5.18  | 4.08        | 4.19      | 4.35       | 4.56       | 4.73       | 4.89       | 5.06       | 5.24       | 5.46       | 5.74       | 6.18       | 6.61       | 7.03         |  |
| 100000                            | 5.77        | 5.76  | 4.21        | 4.36      | 4.56       | 4.84       | 5.07       | 5.30       | 5.54       | 5.80       | 6.12       | 6.54       | 7.24       | 7.92       | 8.61         |  |
| <b>r = 360</b>                    | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                | 2.97        | 2.96  | 2.86        | 2.88      | 2.89       | 2.92       | 2.93       | 2.95       | 2.96       | 2.97       | 2.99       | 3.01       | 3.03       | 3.06       | 3.08         |  |
| 100                               | 3.38        | 3.36  | 3.10        | 3.13      | 3.17       | 3.23       | 3.27       | 3.31       | 3.35       | 3.39       | 3.43       | 3.49       | 3.57       | 3.65       | 3.72         |  |
| 1000                              | 3.78        | 3.76  | 3.27        | 3.33      | 3.40       | 3.49       | 3.57       | 3.64       | 3.71       | 3.79       | 3.88       | 4.00       | 4.18       | 4.34       | 4.50         |  |
| 10000                             | 4.17        | 4.16  | 3.40        | 3.48      | 3.58       | 3.72       | 3.84       | 3.95       | 4.06       | 4.19       | 4.34       | 4.54       | 4.86       | 5.16       | 5.47         |  |
| 100000                            | 4.56        | 4.57  | 3.49        | 3.59      | 3.72       | 3.91       | 4.07       | 4.23       | 4.40       | 4.59       | 4.81       | 5.11       | 5.62       | 6.12       | 6.64         |  |

Eindtabel Vlissingen

| $\mu = -0.013097$ |             | $\sigma = 0.06$ |             | Grenzen betrouwbaarheidsintervallen bij gegeven percentages |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |              |  |
|-------------------|-------------|-----------------|-------------|---|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|--------------|--|
| <b>r = omni</b>   | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b>   | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                | 3.24        | 3.23            | 3.10        | 3.12  | 3.14       | 3.17       | 3.19       | 3.21       | 3.23       | 3.25       | 3.27       | 3.29       | 3.33       | 3.36       | 3.39         |  |
| 100               | 3.81        | 3.78            | 3.42        | 3.46  | 3.52       | 3.60       | 3.65       | 3.71       | 3.76       | 3.82       | 3.88       | 3.96       | 4.08       | 4.19       | 4.29         |  |
| 1000              | 4.38        | 4.35            | 3.66        | 3.73  | 3.83       | 3.97       | 4.08       | 4.18       | 4.28       | 4.39       | 4.52       | 4.69       | 4.95       | 5.20       | 5.43         |  |
| 10000             | 4.94        | 4.93            | 3.83        | 3.94  | 4.09       | 4.29       | 4.46       | 4.62       | 4.79       | 4.97       | 5.19       | 5.49       | 5.96       | 6.43       | 6.90         |  |
| 100000            | 5.51        | 5.55            | 3.96        | 4.10  | 4.29       | 4.57       | 4.80       | 5.03       | 5.28       | 5.56       | 5.89       | 6.36       | 7.14       | 7.94       | 8.77         |  |
| <b>r = 210</b>    | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b>   | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                | 2.23        | 2.22            | 2.14        | 2.15  | 2.17       | 2.18       | 2.20       | 2.21       | 2.22       | 2.23       | 2.24       | 2.25       | 2.28       | 2.29       | 2.31         |  |
| 100               | 2.54        | 2.53            | 2.32        | 2.35  | 2.38       | 2.42       | 2.46       | 2.49       | 2.52       | 2.55       | 2.58       | 2.62       | 2.69       | 2.75       | 2.80         |  |
| 1000              | 2.85        | 2.84            | 2.46        | 2.50  | 2.55       | 2.63       | 2.69       | 2.74       | 2.80       | 2.86       | 2.93       | 3.02       | 3.16       | 3.29       | 3.42         |  |
| 10000             | 3.16        | 3.15            | 2.55        | 2.62  | 2.69       | 2.80       | 2.90       | 2.98       | 3.07       | 3.17       | 3.29       | 3.45       | 3.70       | 3.94       | 4.18         |  |
| 100000            | 3.46        | 3.47            | 2.63        | 2.70  | 2.81       | 2.95       | 3.08       | 3.21       | 3.34       | 3.48       | 3.66       | 3.90       | 4.30       | 4.71       | 5.12         |  |
| <b>r = 240</b>    | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b>   | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                | 2.56        | 2.55            | 2.46        | 2.47  | 2.49       | 2.51       | 2.52       | 2.54       | 2.55       | 2.56       | 2.58       | 2.59       | 2.62       | 2.64       | 2.66         |  |
| 100               | 2.94        | 2.93            | 2.68        | 2.71  | 2.75       | 2.80       | 2.84       | 2.88       | 2.91       | 2.95       | 2.99       | 3.04       | 3.12       | 3.19       | 3.26         |  |
| 1000              | 3.32        | 3.30            | 2.84        | 2.89  | 2.96       | 3.05       | 3.12       | 3.19       | 3.25       | 3.33       | 3.41       | 3.52       | 3.69       | 3.85       | 4.00         |  |
| 10000             | 3.69        | 3.67            | 2.96        | 3.03  | 3.13       | 3.26       | 3.37       | 3.47       | 3.58       | 3.70       | 3.84       | 4.03       | 4.33       | 4.62       | 4.91         |  |
| 100000            | 4.05        | 4.06            | 3.04        | 3.14  | 3.26       | 3.44       | 3.59       | 3.74       | 3.90       | 4.07       | 4.29       | 4.58       | 5.05       | 5.54       | 6.03         |  |
| <b>r = 270</b>    | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b>   | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                | 2.91        | 2.90            | 2.78        | 2.80  | 2.82       | 2.84       | 2.86       | 2.88       | 2.90       | 2.91       | 2.93       | 2.95       | 2.99       | 3.02       | 3.04         |  |
| 100               | 3.41        | 3.39            | 3.07        | 3.11  | 3.16       | 3.23       | 3.28       | 3.33       | 3.37       | 3.42       | 3.48       | 3.55       | 3.65       | 3.75       | 3.83         |  |
| 1000              | 3.91        | 3.88            | 3.28        | 3.35  | 3.44       | 3.55       | 3.65       | 3.74       | 3.83       | 3.92       | 4.04       | 4.18       | 4.40       | 4.61       | 4.81         |  |
| 10000             | 4.40        | 4.38            | 3.43        | 3.53  | 3.66       | 3.83       | 3.98       | 4.12       | 4.26       | 4.42       | 4.61       | 4.85       | 5.25       | 5.64       | 6.02         |  |
| 100000            | 4.88        | 4.89            | 3.55        | 3.67  | 3.84       | 4.07       | 4.28       | 4.47       | 4.68       | 4.91       | 5.20       | 5.58       | 6.21       | 6.85       | 7.51         |  |
| <b>r = 300</b>    | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b>   | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                | 3.03        | 3.01            | 2.87        | 2.89  | 2.91       | 2.95       | 2.97       | 2.99       | 3.01       | 3.03       | 3.05       | 3.08       | 3.12       | 3.16       | 3.19         |  |
| 100               | 3.63        | 3.60            | 3.22        | 3.26  | 3.32       | 3.40       | 3.47       | 3.52       | 3.58       | 3.64       | 3.70       | 3.78       | 3.91       | 4.02       | 4.12         |  |
| 1000              | 4.21        | 4.18            | 3.47        | 3.55  | 3.65       | 3.79       | 3.90       | 4.01       | 4.12       | 4.23       | 4.36       | 4.53       | 4.79       | 5.04       | 5.27         |  |
| 10000             | 4.79        | 4.76            | 3.65        | 3.77  | 3.91       | 4.12       | 4.29       | 4.46       | 4.63       | 4.81       | 5.03       | 5.32       | 5.79       | 6.23       | 6.68         |  |
| 100000            | 5.35        | 5.36            | 3.79        | 3.93  | 4.13       | 4.41       | 4.64       | 4.87       | 5.12       | 5.39       | 5.72       | 6.17       | 6.91       | 7.65       | 8.41         |  |
| <b>r = 330</b>    | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b>   | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                | 2.92        | 2.90            | 2.75        | 2.77  | 2.80       | 2.83       | 2.86       | 2.88       | 2.90       | 2.92       | 2.95       | 2.98       | 3.02       | 3.06       | 3.09         |  |
| 100               | 3.56        | 3.53            | 3.12        | 3.17  | 3.24       | 3.32       | 3.39       | 3.45       | 3.51       | 3.57       | 3.64       | 3.73       | 3.86       | 3.98       | 4.09         |  |
| 1000              | 4.18        | 4.14            | 3.39        | 3.47  | 3.58       | 3.73       | 3.85       | 3.96       | 4.08       | 4.20       | 4.34       | 4.51       | 4.79       | 5.05       | 5.30         |  |
| 10000             | 4.79        | 4.76            | 3.58        | 3.71  | 3.86       | 4.08       | 4.27       | 4.44       | 4.62       | 4.81       | 5.05       | 5.35       | 5.84       | 6.31       | 6.77         |  |
| 100000            | 5.38        | 5.39            | 3.73        | 3.88  | 4.09       | 4.38       | 4.63       | 4.88       | 5.13       | 5.42       | 5.77       | 6.24       | 7.01       | 7.79       | 8.58         |  |
| <b>r = 360</b>    | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b>   | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                | 2.45        | 2.44            | 2.32        | 2.34  | 2.36       | 2.38       | 2.40       | 2.42       | 2.43       | 2.45       | 2.47       | 2.49       | 2.53       | 2.55       | 2.58         |  |
| 100               | 2.95        | 2.92            | 2.60        | 2.65  | 2.70       | 2.76       | 2.81       | 2.86       | 2.91       | 2.95       | 3.01       | 3.08       | 3.18       | 3.27       | 3.36         |  |
| 1000              | 3.43        | 3.41            | 2.81        | 2.88  | 2.97       | 3.08       | 3.18       | 3.26       | 3.35       | 3.45       | 3.56       | 3.70       | 3.92       | 4.12       | 4.32         |  |
| 10000             | 3.91        | 3.89            | 2.97        | 3.06  | 3.19       | 3.36       | 3.50       | 3.64       | 3.78       | 3.93       | 4.12       | 4.36       | 4.74       | 5.12       | 5.49         |  |
| 100000            | 4.38        | 4.39            | 3.08        | 3.20  | 3.36       | 3.59       | 3.79       | 3.98       | 4.19       | 4.41       | 4.69       | 5.06       | 5.68       | 6.30       | 6.94         |  |

Eindtabel OS11

| $\mu = -0.0090351$ $\sigma = 0.04614$ |             |                | Grenzen betrouwbaarheidsintervallen bij gegeven percentages |           |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |              |  |
|---------------------------------------|-------------|----------------|---|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|--------------|--|
| r = omni                              | Wbl.        | Gem. TR        | 2.5%  | 5%        | 10%        | 20%        | 30%        | 40%        | 50%        | 60%        | 70%        | 80%        | 90%        | 95%        | 97.5%        |  |
| 10                                    | 2.94        | 2.93           | 2.82  | 2.83      | 2.85       | 2.87       | 2.89       | 2.91       | 2.92       | 2.94       | 2.96       | 2.98       | 3.01       | 3.04       | 3.06         |  |
| 100                                   | 3.57        | 3.55           | 3.21  | 3.26      | 3.31       | 3.38       | 3.43       | 3.48       | 3.53       | 3.58       | 3.64       | 3.71       | 3.81       | 3.91       | 4.00         |  |
| 1000                                  | 4.26        | 4.23           | 3.55  | 3.63      | 3.73       | 3.86       | 3.97       | 4.07       | 4.17       | 4.28       | 4.41       | 4.56       | 4.81       | 5.04       | 5.26         |  |
| 10000                                 | 4.99        | 4.98           | 3.82  | 3.94      | 4.10       | 4.32       | 4.50       | 4.67       | 4.84       | 5.04       | 5.26       | 5.56       | 6.05       | 6.51       | 6.98         |  |
| 100000                                | 5.78        | 5.83           | 4.04  | 4.21      | 4.43       | 4.74       | 5.01       | 5.27       | 5.54       | 5.85       | 6.22       | 6.72       | 7.57       | 8.43       | 9.33         |  |
| <b>r = 210</b>                        | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b> | <b>2.5%</b>   | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                    | 1.84        | 1.83           | 1.78  | 1.79      | 1.80       | 1.81       | 1.82       | 1.82       | 1.83       | 1.84       | 1.85       | 1.85       | 1.87       | 1.88       | 1.89         |  |
| 100                                   | 2.10        | 2.09           | 1.95  | 1.97      | 1.99       | 2.02       | 2.04       | 2.06       | 2.08       | 2.10       | 2.13       | 2.15       | 2.19       | 2.23       | 2.26         |  |
| 1000                                  | 2.36        | 2.35           | 2.09  | 2.12      | 2.16       | 2.21       | 2.26       | 2.29       | 2.33       | 2.37       | 2.42       | 2.48       | 2.57       | 2.65       | 2.72         |  |
| 10000                                 | 2.63        | 2.62           | 2.20  | 2.24      | 2.30       | 2.39       | 2.45       | 2.51       | 2.58       | 2.65       | 2.72       | 2.83       | 2.99       | 3.14       | 3.29         |  |
| 100000                                | 2.90        | 2.90           | 2.28  | 2.35      | 2.43       | 2.54       | 2.64       | 2.73       | 2.82       | 2.92       | 3.04       | 3.20       | 3.46       | 3.72       | 3.97         |  |
| <b>r = 240</b>                        | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b> | <b>2.5%</b>   | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                    | 2.18        | 2.17           | 2.11  | 2.12      | 2.13       | 2.14       | 2.15       | 2.16       | 2.17       | 2.18       | 2.19       | 2.20       | 2.22       | 2.23       | 2.25         |  |
| 100                                   | 2.52        | 2.51           | 2.33  | 2.36      | 2.38       | 2.42       | 2.45       | 2.48       | 2.50       | 2.53       | 2.56       | 2.60       | 2.65       | 2.70       | 2.74         |  |
| 1000                                  | 2.87        | 2.86           | 2.51  | 2.55      | 2.61       | 2.68       | 2.73       | 2.78       | 2.83       | 2.89       | 2.95       | 3.03       | 3.15       | 3.26       | 3.36         |  |
| 10000                                 | 3.23        | 3.22           | 2.65  | 2.72      | 2.80       | 2.91       | 3.00       | 3.08       | 3.16       | 3.26       | 3.36       | 3.50       | 3.72       | 3.93       | 4.13         |  |
| 100000                                | 3.60        | 3.60           | 2.77  | 2.85      | 2.96       | 3.11       | 3.24       | 3.37       | 3.49       | 3.63       | 3.80       | 4.02       | 4.38       | 4.74       | 5.09         |  |
| <b>r = 270</b>                        | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b> | <b>2.5%</b>   | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                    | 2.57        | 2.57           | 2.47  | 2.49      | 2.50       | 2.52       | 2.54       | 2.55       | 2.56       | 2.58       | 2.59       | 2.61       | 2.63       | 2.65       | 2.67         |  |
| 100                                   | 3.08        | 3.06           | 2.80  | 2.83      | 2.87       | 2.93       | 2.97       | 3.01       | 3.05       | 3.08       | 3.13       | 3.18       | 3.26       | 3.33       | 3.40         |  |
| 1000                                  | 3.60        | 3.57           | 3.06  | 3.12      | 3.20       | 3.30       | 3.38       | 3.46       | 3.53       | 3.61       | 3.71       | 3.82       | 4.00       | 4.17       | 4.32         |  |
| 10000                                 | 4.13        | 4.12           | 3.27  | 3.36      | 3.48       | 3.64       | 3.77       | 3.90       | 4.03       | 4.16       | 4.33       | 4.54       | 4.87       | 5.18       | 5.50         |  |
| 100000                                | 4.68        | 4.69           | 3.44  | 3.56      | 3.72       | 3.95       | 4.14       | 4.33       | 4.52       | 4.73       | 4.99       | 5.32       | 5.88       | 6.42       | 6.98         |  |
| <b>r = 300</b>                        | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b> | <b>2.5%</b>   | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                    | 2.71        | 2.70           | 2.58  | 2.60      | 2.62       | 2.64       | 2.66       | 2.68       | 2.69       | 2.71       | 2.73       | 2.75       | 2.78       | 2.81       | 2.83         |  |
| 100                                   | 3.36        | 3.33           | 2.99  | 3.04      | 3.09       | 3.16       | 3.22       | 3.27       | 3.32       | 3.37       | 3.43       | 3.50       | 3.60       | 3.70       | 3.78         |  |
| 1000                                  | 4.04        | 4.02           | 3.33  | 3.41      | 3.51       | 3.65       | 3.76       | 3.86       | 3.96       | 4.07       | 4.19       | 4.35       | 4.59       | 4.81       | 5.03         |  |
| 10000                                 | 4.76        | 4.75           | 3.61  | 3.73      | 3.89       | 4.10       | 4.28       | 4.45       | 4.62       | 4.81       | 5.03       | 5.32       | 5.78       | 6.22       | 6.65         |  |
| 100000                                | 5.52        | 5.55           | 3.83  | 4.00      | 4.21       | 4.52       | 4.78       | 5.03       | 5.30       | 5.59       | 5.94       | 6.41       | 7.20       | 7.98       | 8.78         |  |
| <b>r = 330</b>                        | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b> | <b>2.5%</b>   | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                    | 2.63        | 2.62           | 2.50  | 2.51      | 2.54       | 2.56       | 2.58       | 2.60       | 2.62       | 2.64       | 2.66       | 2.68       | 2.72       | 2.75       | 2.77         |  |
| 100                                   | 3.34        | 3.32           | 2.94  | 2.99      | 3.05       | 3.13       | 3.19       | 3.25       | 3.30       | 3.35       | 3.42       | 3.49       | 3.61       | 3.71       | 3.81         |  |
| 1000                                  | 4.09        | 4.06           | 3.31  | 3.40      | 3.51       | 3.66       | 3.78       | 3.89       | 4.00       | 4.12       | 4.25       | 4.42       | 4.68       | 4.93       | 5.16         |  |
| 10000                                 | 4.87        | 4.86           | 3.62  | 3.75      | 3.92       | 4.16       | 4.35       | 4.53       | 4.72       | 4.92       | 5.16       | 5.47       | 5.97       | 6.45       | 6.92         |  |
| 100000                                | 5.69        | 5.72           | 3.86  | 4.04      | 4.28       | 4.61       | 4.89       | 5.17       | 5.45       | 5.77       | 6.15       | 6.66       | 7.50       | 8.35       | 9.21         |  |
| <b>r = 360</b>                        | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b> | <b>2.5%</b>   | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                    | 2.18        | 2.17           | 2.07  | 2.09      | 2.10       | 2.12       | 2.14       | 2.15       | 2.17       | 2.18       | 2.19       | 2.21       | 2.24       | 2.26       | 2.28         |  |
| 100                                   | 2.70        | 2.68           | 2.41  | 2.44      | 2.49       | 2.55       | 2.59       | 2.63       | 2.67       | 2.71       | 2.76       | 2.81       | 2.90       | 2.97       | 3.04         |  |
| 1000                                  | 3.24        | 3.22           | 2.68  | 2.75      | 2.83       | 2.94       | 3.02       | 3.10       | 3.18       | 3.26       | 3.36       | 3.48       | 3.67       | 3.84       | 4.01         |  |
| 10000                                 | 3.81        | 3.79           | 2.90  | 3.00      | 3.12       | 3.29       | 3.43       | 3.56       | 3.70       | 3.84       | 4.01       | 4.23       | 4.58       | 4.92       | 5.24         |  |
| 100000                                | 4.39        | 4.40           | 3.08  | 3.21      | 3.38       | 3.62       | 3.82       | 4.01       | 4.22       | 4.44       | 4.71       | 5.06       | 5.65       | 6.22       | 6.81         |  |

Eindtabel Hoek van Holland

| $\mu = -0.0090351$ $\sigma = 0.04614$ |             | Grenzen betrouwbaarheidsintervallen bij gegeven percentages |             |           |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |              |
|---------------------------------------|-------------|---|-------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|--------------|
| r = omni                              | Wbl.        | Gem. TR   | 2.5%        | 5%        | 10%        | 20%        | 30%        | 40%        | 50%        | 60%        | 70%        | 80%        | 90%        | 95%        | 97.5%        |
| 10                                    | 2.85        | 2.84  | 2.72        | 2.74      | 2.76       | 2.79       | 2.81       | 2.82       | 2.84       | 2.86       | 2.88       | 2.90       | 2.93       | 2.96       | 2.99         |
| 100                                   | 3.55        | 3.53  | 3.16        | 3.20      | 3.26       | 3.34       | 3.40       | 3.45       | 3.50       | 3.56       | 3.62       | 3.70       | 3.81       | 3.92       | 4.01         |
| 1000                                  | 4.29        | 4.27  | 3.52        | 3.61      | 3.72       | 3.87       | 3.98       | 4.09       | 4.20       | 4.32       | 4.46       | 4.63       | 4.90       | 5.15       | 5.38         |
| 10000                                 | 5.09        | 5.08  | 3.82        | 3.95      | 4.12       | 4.36       | 4.56       | 4.74       | 4.93       | 5.14       | 5.39       | 5.71       | 6.23       | 6.73       | 7.23         |
| 100000                                | 5.94        | 5.99  | 4.06        | 4.24      | 4.48       | 4.82       | 5.11       | 5.39       | 5.68       | 6.02       | 6.41       | 6.95       | 7.85       | 8.76       | 9.71         |
| <b>r = 210</b>                        | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                    | 1.72        | 1.71  | 1.65        | 1.66      | 1.67       | 1.68       | 1.69       | 1.70       | 1.71       | 1.72       | 1.73       | 1.74       | 1.75       | 1.77       | 1.78         |
| 100                                   | 2.03        | 2.02  | 1.86        | 1.88      | 1.90       | 1.94       | 1.96       | 1.99       | 2.01       | 2.03       | 2.06       | 2.09       | 2.14       | 2.19       | 2.23         |
| 1000                                  | 2.34        | 2.33  | 2.02        | 2.06      | 2.10       | 2.17       | 2.22       | 2.26       | 2.31       | 2.35       | 2.41       | 2.48       | 2.58       | 2.68       | 2.76         |
| 10000                                 | 2.65        | 2.64  | 2.15        | 2.20      | 2.27       | 2.37       | 2.45       | 2.52       | 2.59       | 2.67       | 2.77       | 2.88       | 3.07       | 3.24       | 3.41         |
| 100000                                | 2.97        | 2.96  | 2.25        | 2.32      | 2.42       | 2.55       | 2.66       | 2.77       | 2.88       | 2.99       | 3.14       | 3.32       | 3.62       | 3.91       | 4.19         |
| <b>r = 240</b>                        | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                    | 2.04        | 2.04  | 1.97        | 1.98      | 1.99       | 2.01       | 2.02       | 2.03       | 2.03       | 2.04       | 2.05       | 2.07       | 2.08       | 2.10       | 2.11         |
| 100                                   | 2.40        | 2.39  | 2.20        | 2.23      | 2.26       | 2.29       | 2.32       | 2.35       | 2.38       | 2.40       | 2.44       | 2.47       | 2.53       | 2.58       | 2.62         |
| 1000                                  | 2.76        | 2.74  | 2.39        | 2.43      | 2.48       | 2.55       | 2.61       | 2.66       | 2.71       | 2.77       | 2.83       | 2.91       | 3.03       | 3.14       | 3.24         |
| 10000                                 | 3.11        | 3.10  | 2.53        | 2.60      | 2.68       | 2.79       | 2.88       | 2.96       | 3.04       | 3.14       | 3.24       | 3.38       | 3.59       | 3.80       | 3.99         |
| 100000                                | 3.48        | 3.47  | 2.65        | 2.73      | 2.84       | 3.00       | 3.12       | 3.24       | 3.37       | 3.51       | 3.67       | 3.89       | 4.23       | 4.57       | 4.90         |
| <b>r = 270</b>                        | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                    | 2.53        | 2.52  | 2.41        | 2.43      | 2.45       | 2.47       | 2.49       | 2.50       | 2.52       | 2.53       | 2.55       | 2.57       | 2.60       | 2.62       | 2.64         |
| 100                                   | 3.11        | 3.09  | 2.79        | 2.83      | 2.87       | 2.94       | 2.99       | 3.03       | 3.07       | 3.12       | 3.17       | 3.23       | 3.32       | 3.40       | 3.48         |
| 1000                                  | 3.70        | 3.67  | 3.09        | 3.16      | 3.25       | 3.36       | 3.46       | 3.54       | 3.63       | 3.72       | 3.82       | 3.96       | 4.16       | 4.34       | 4.52         |
| 10000                                 | 4.30        | 4.28  | 3.33        | 3.43      | 3.57       | 3.75       | 3.90       | 4.04       | 4.18       | 4.34       | 4.52       | 4.76       | 5.12       | 5.48       | 5.82         |
| 100000                                | 4.92        | 4.92  | 3.52        | 3.66      | 3.84       | 4.10       | 4.32       | 4.52       | 4.74       | 4.97       | 5.26       | 5.63       | 6.24       | 6.83       | 7.43         |
| <b>r = 300</b>                        | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                    | 2.58        | 2.57  | 2.44        | 2.46      | 2.48       | 2.51       | 2.53       | 2.55       | 2.56       | 2.58       | 2.60       | 2.63       | 2.66       | 2.69       | 2.71         |
| 100                                   | 3.27        | 3.25  | 2.89        | 2.93      | 2.99       | 3.07       | 3.13       | 3.18       | 3.23       | 3.29       | 3.35       | 3.42       | 3.54       | 3.64       | 3.73         |
| 1000                                  | 4.01        | 3.98  | 3.25        | 3.34      | 3.44       | 3.59       | 3.71       | 3.81       | 3.92       | 4.03       | 4.16       | 4.33       | 4.58       | 4.82       | 5.04         |
| 10000                                 | 4.77        | 4.75  | 3.54        | 3.67      | 3.84       | 4.07       | 4.26       | 4.43       | 4.61       | 4.81       | 5.04       | 5.34       | 5.82       | 6.28       | 6.72         |
| 100000                                | 5.55        | 5.58  | 3.78        | 3.96      | 4.19       | 4.51       | 4.78       | 5.05       | 5.32       | 5.63       | 5.99       | 6.48       | 7.28       | 8.07       | 8.88         |
| <b>r = 330</b>                        | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                    | 2.45        | 2.44  | 2.30        | 2.32      | 2.34       | 2.37       | 2.39       | 2.41       | 2.43       | 2.45       | 2.47       | 2.50       | 2.54       | 2.57       | 2.60         |
| 100                                   | 3.20        | 3.18  | 2.78        | 2.83      | 2.90       | 2.98       | 3.04       | 3.10       | 3.16       | 3.22       | 3.28       | 3.37       | 3.49       | 3.60       | 3.70         |
| 1000                                  | 4.00        | 3.96  | 3.18        | 3.27      | 3.39       | 3.55       | 3.67       | 3.79       | 3.90       | 4.03       | 4.17       | 4.35       | 4.62       | 4.88       | 5.12         |
| 10000                                 | 4.82        | 4.80  | 3.50        | 3.64      | 3.82       | 4.07       | 4.27       | 4.46       | 4.66       | 4.87       | 5.12       | 5.44       | 5.96       | 6.45       | 6.93         |
| 100000                                | 5.67        | 5.69  | 3.76        | 3.95      | 4.19       | 4.55       | 4.84       | 5.12       | 5.42       | 5.75       | 6.14       | 6.66       | 7.52       | 8.38       | 9.24         |
| <b>r = 360</b>                        | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                    | 1.87        | 1.86  | 1.78        | 1.79      | 1.80       | 1.82       | 1.84       | 1.85       | 1.86       | 1.87       | 1.89       | 1.90       | 1.93       | 1.95       | 1.97         |
| 100                                   | 2.35        | 2.33  | 2.08        | 2.11      | 2.15       | 2.21       | 2.25       | 2.28       | 2.32       | 2.35       | 2.39       | 2.45       | 2.52       | 2.59       | 2.65         |
| 1000                                  | 2.83        | 2.80  | 2.33        | 2.39      | 2.46       | 2.55       | 2.63       | 2.70       | 2.77       | 2.84       | 2.93       | 3.03       | 3.19       | 3.34       | 3.48         |
| 10000                                 | 3.31        | 3.29  | 2.52        | 2.61      | 2.72       | 2.87       | 2.99       | 3.10       | 3.21       | 3.34       | 3.48       | 3.67       | 3.96       | 4.23       | 4.50         |
| 100000                                | 3.80        | 3.80  | 2.68        | 2.79      | 2.94       | 3.15       | 3.32       | 3.48       | 3.65       | 3.84       | 4.06       | 4.35       | 4.83       | 5.28       | 5.74         |

Eindtabel IJmuiden Buitenhaven

| $\mu = -0.0075969$ $\sigma = 0.0536$ |             | Grenzen betrouwbaarheidsintervallen bij gegeven percentages |             |           |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |              |  |
|--------------------------------------|-------------|---|-------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|--------------|--|
| r = omni                             | Wbl.        | Gem. TR   | 2.5%        | 5%        | 10%        | 20%        | 30%        | 40%        | 50%        | 60%        | 70%        | 80%        | 90%        | 95%        | 97.5%        |  |
| 10                                   | 2.70        | 2.69  | 2.54        | 2.56      | 2.59       | 2.62       | 2.64       | 2.66       | 2.68       | 2.70       | 2.73       | 2.75       | 2.79       | 2.82       | 2.85         |  |
| 100                                  | 3.32        | 3.30  | 2.95        | 2.99      | 3.05       | 3.13       | 3.19       | 3.24       | 3.29       | 3.34       | 3.40       | 3.47       | 3.58       | 3.67       | 3.76         |  |
| 1000                                 | 3.88        | 3.86  | 3.23        | 3.31      | 3.41       | 3.54       | 3.64       | 3.73       | 3.82       | 3.92       | 4.03       | 4.16       | 4.37       | 4.56       | 4.73         |  |
| 10000                                | 4.39        | 4.39  | 3.45        | 3.56      | 3.69       | 3.88       | 4.03       | 4.17       | 4.31       | 4.46       | 4.63       | 4.85       | 5.19       | 5.50       | 5.80         |  |
| 100000                               | 4.87        | 4.89  | 3.61        | 3.74      | 3.92       | 4.17       | 4.37       | 4.56       | 4.76       | 4.97       | 5.22       | 5.54       | 6.04       | 6.53       | 7.00         |  |
| <b>r = 210</b>                       | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                   | 1.38        | 1.38  | 1.33        | 1.34      | 1.35       | 1.36       | 1.36       | 1.37       | 1.38       | 1.38       | 1.39       | 1.40       | 1.41       | 1.42       | 1.43         |  |
| 100                                  | 1.59        | 1.59  | 1.46        | 1.48      | 1.50       | 1.53       | 1.55       | 1.56       | 1.58       | 1.60       | 1.62       | 1.65       | 1.68       | 1.72       | 1.75         |  |
| 1000                                 | 1.79        | 1.79  | 1.56        | 1.59      | 1.63       | 1.67       | 1.71       | 1.74       | 1.77       | 1.81       | 1.84       | 1.89       | 1.97       | 2.04       | 2.10         |  |
| 10000                                | 1.98        | 1.98  | 1.64        | 1.68      | 1.73       | 1.79       | 1.85       | 1.90       | 1.95       | 2.00       | 2.07       | 2.15       | 2.27       | 2.39       | 2.51         |  |
| 100000                               | 2.16        | 2.17  | 1.69        | 1.74      | 1.81       | 1.90       | 1.97       | 2.04       | 2.11       | 2.19       | 2.28       | 2.41       | 2.60       | 2.79       | 2.97         |  |
| <b>r = 240</b>                       | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                   | 1.82        | 1.81  | 1.71        | 1.73      | 1.74       | 1.77       | 1.78       | 1.80       | 1.81       | 1.82       | 1.84       | 1.86       | 1.88       | 1.90       | 1.92         |  |
| 100                                  | 2.25        | 2.24  | 1.99        | 2.02      | 2.06       | 2.11       | 2.15       | 2.19       | 2.23       | 2.26       | 2.30       | 2.36       | 2.43       | 2.50       | 2.56         |  |
| 1000                                 | 2.65        | 2.64  | 2.19        | 2.24      | 2.31       | 2.40       | 2.48       | 2.54       | 2.61       | 2.68       | 2.76       | 2.86       | 3.01       | 3.15       | 3.28         |  |
| 10000                                | 3.03        | 3.03  | 2.34        | 2.42      | 2.52       | 2.65       | 2.76       | 2.86       | 2.96       | 3.08       | 3.20       | 3.37       | 3.63       | 3.87       | 4.10         |  |
| 100000                               | 3.39        | 3.41  | 2.45        | 2.55      | 2.68       | 2.86       | 3.01       | 3.15       | 3.30       | 3.46       | 3.65       | 3.90       | 4.29       | 4.67       | 5.05         |  |
| <b>r = 270</b>                       | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                   | 2.36        | 2.35  | 2.21        | 2.23      | 2.26       | 2.29       | 2.31       | 2.33       | 2.35       | 2.37       | 2.39       | 2.42       | 2.45       | 2.49       | 2.51         |  |
| 100                                  | 2.96        | 2.94  | 2.60        | 2.65      | 2.70       | 2.78       | 2.83       | 2.88       | 2.93       | 2.98       | 3.03       | 3.10       | 3.20       | 3.29       | 3.37         |  |
| 1000                                 | 3.48        | 3.47  | 2.88        | 2.95      | 3.04       | 3.17       | 3.26       | 3.35       | 3.43       | 3.52       | 3.62       | 3.75       | 3.94       | 4.11       | 4.28         |  |
| 10000                                | 3.96        | 3.96  | 3.08        | 3.18      | 3.31       | 3.49       | 3.63       | 3.76       | 3.89       | 4.02       | 4.18       | 4.39       | 4.70       | 4.99       | 5.26         |  |
| 100000                               | 4.41        | 4.42  | 3.23        | 3.36      | 3.53       | 3.76       | 3.94       | 4.12       | 4.30       | 4.49       | 4.72       | 5.02       | 5.48       | 5.92       | 6.35         |  |
| <b>r = 300</b>                       | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                   | 2.44        | 2.43  | 2.26        | 2.29      | 2.32       | 2.35       | 2.38       | 2.40       | 2.43       | 2.45       | 2.47       | 2.50       | 2.55       | 2.58       | 2.62         |  |
| 100                                  | 3.12        | 3.10  | 2.72        | 2.77      | 2.83       | 2.92       | 2.98       | 3.03       | 3.09       | 3.14       | 3.21       | 3.28       | 3.39       | 3.49       | 3.58         |  |
| 1000                                 | 3.70        | 3.68  | 3.03        | 3.11      | 3.22       | 3.35       | 3.46       | 3.55       | 3.64       | 3.74       | 3.85       | 3.99       | 4.19       | 4.38       | 4.55         |  |
| 10000                                | 4.21        | 4.20  | 3.26        | 3.37      | 3.51       | 3.70       | 3.85       | 3.99       | 4.13       | 4.28       | 4.45       | 4.66       | 4.99       | 5.29       | 5.57         |  |
| 100000                               | 4.68        | 4.69  | 3.42        | 3.56      | 3.75       | 3.99       | 4.19       | 4.38       | 4.57       | 4.78       | 5.01       | 5.32       | 5.79       | 6.24       | 6.67         |  |
| <b>r = 330</b>                       | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                   | 2.14        | 2.13  | 1.92        | 1.95      | 1.99       | 2.03       | 2.07       | 2.10       | 2.13       | 2.15       | 2.18       | 2.22       | 2.27       | 2.32       | 2.36         |  |
| 100                                  | 2.95        | 2.93  | 2.48        | 2.54      | 2.62       | 2.72       | 2.79       | 2.85       | 2.92       | 2.98       | 3.05       | 3.14       | 3.27       | 3.38       | 3.48         |  |
| 1000                                 | 3.61        | 3.59  | 2.85        | 2.95      | 3.07       | 3.22       | 3.34       | 3.45       | 3.55       | 3.66       | 3.79       | 3.94       | 4.16       | 4.37       | 4.55         |  |
| 10000                                | 4.19        | 4.17  | 3.11        | 3.24      | 3.40       | 3.62       | 3.79       | 3.94       | 4.10       | 4.26       | 4.45       | 4.68       | 5.03       | 5.36       | 5.66         |  |
| 100000                               | 4.70        | 4.70  | 3.30        | 3.46      | 3.67       | 3.94       | 4.17       | 4.37       | 4.58       | 4.80       | 5.06       | 5.39       | 5.90       | 6.38       | 6.83         |  |
| <b>r = 360</b>                       | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                   | 1.29        | 1.28  | 1.11        | 1.13      | 1.16       | 1.20       | 1.23       | 1.26       | 1.28       | 1.31       | 1.33       | 1.36       | 1.41       | 1.45       | 1.48         |  |
| 100                                  | 2.01        | 2.00  | 1.59        | 1.65      | 1.71       | 1.80       | 1.87       | 1.92       | 1.98       | 2.04       | 2.10       | 2.18       | 2.30       | 2.40       | 2.50         |  |
| 1000                                 | 2.63        | 2.61  | 1.92        | 2.01      | 2.12       | 2.26       | 2.37       | 2.47       | 2.57       | 2.67       | 2.79       | 2.94       | 3.16       | 3.35       | 3.54         |  |
| 10000                                | 3.18        | 3.17  | 2.16        | 2.28      | 2.43       | 2.63       | 2.79       | 2.94       | 3.09       | 3.25       | 3.43       | 3.66       | 4.02       | 4.35       | 4.67         |  |
| 100000                               | 3.69        | 3.71  | 2.33        | 2.48      | 2.68       | 2.94       | 3.16       | 3.36       | 3.57       | 3.79       | 4.05       | 4.39       | 4.92       | 5.42       | 5.92         |  |

Eindtabel Den Helder

| $\mu = -0.009098$ $\sigma = 0.0615$ |             | Grenzen betrouwbaarheidsintervallen bij gegeven percentages |             |           |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |              |
|-------------------------------------|-------------|---|-------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|--------------|
| <b>r = omni</b>                     | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                  | 3.49        | 3.48  | 3.32        | 3.35      | 3.37       | 3.41       | 3.43       | 3.46       | 3.48       | 3.50       | 3.53       | 3.56       | 3.60       | 3.64       | 3.67         |
| 100                                 | 4.08        | 4.06  | 3.69        | 3.74      | 3.80       | 3.88       | 3.94       | 3.99       | 4.04       | 4.10       | 4.16       | 4.24       | 4.35       | 4.45       | 4.54         |
| 1000                                | 4.58        | 4.56  | 3.93        | 4.01      | 4.11       | 4.24       | 4.34       | 4.43       | 4.52       | 4.62       | 4.73       | 4.86       | 5.07       | 5.26       | 5.43         |
| 10000                               | 5.02        | 5.02  | 4.10        | 4.21      | 4.34       | 4.52       | 4.67       | 4.80       | 4.94       | 5.08       | 5.25       | 5.46       | 5.79       | 6.10       | 6.39         |
| 100000                              | 5.42        | 5.44  | 4.22        | 4.35      | 4.52       | 4.75       | 4.95       | 5.13       | 5.31       | 5.51       | 5.74       | 6.05       | 6.52       | 6.98       | 7.41         |
| <b>r = 210</b>                      | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                  | 1.88        | 1.88  | 1.83        | 1.83      | 1.84       | 1.85       | 1.86       | 1.87       | 1.88       | 1.88       | 1.89       | 1.90       | 1.92       | 1.93       | 1.94         |
| 100                                 | 2.09        | 2.09  | 1.95        | 1.97      | 1.99       | 2.02       | 2.04       | 2.06       | 2.08       | 2.10       | 2.12       | 2.15       | 2.20       | 2.24       | 2.28         |
| 1000                                | 2.29        | 2.29  | 2.04        | 2.07      | 2.10       | 2.15       | 2.19       | 2.23       | 2.27       | 2.31       | 2.36       | 2.42       | 2.51       | 2.60       | 2.69         |
| 10000                               | 2.49        | 2.50  | 2.10        | 2.14      | 2.20       | 2.27       | 2.33       | 2.39       | 2.45       | 2.52       | 2.60       | 2.70       | 2.87       | 3.03       | 3.18         |
| 100000                              | 2.68        | 2.71  | 2.15        | 2.20      | 2.27       | 2.37       | 2.45       | 2.54       | 2.62       | 2.72       | 2.84       | 3.00       | 3.26       | 3.52       | 3.79         |
| <b>r = 240</b>                      | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                  | 2.61        | 2.60  | 2.44        | 2.46      | 2.49       | 2.53       | 2.55       | 2.58       | 2.60       | 2.62       | 2.65       | 2.68       | 2.72       | 2.76       | 2.79         |
| 100                                 | 3.22        | 3.20  | 2.81        | 2.87      | 2.93       | 3.01       | 3.07       | 3.13       | 3.19       | 3.24       | 3.31       | 3.39       | 3.50       | 3.61       | 3.70         |
| 1000                                | 3.75        | 3.73  | 3.07        | 3.15      | 3.25       | 3.39       | 3.49       | 3.59       | 3.69       | 3.79       | 3.91       | 4.05       | 4.28       | 4.48       | 4.67         |
| 10000                               | 4.22        | 4.22  | 3.25        | 3.36      | 3.50       | 3.69       | 3.84       | 3.99       | 4.13       | 4.29       | 4.47       | 4.70       | 5.06       | 5.40       | 5.72         |
| 100000                              | 4.66        | 4.68  | 3.37        | 3.51      | 3.69       | 3.94       | 4.14       | 4.33       | 4.53       | 4.75       | 5.01       | 5.34       | 5.87       | 6.38       | 6.88         |
| <b>r = 270</b>                      | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                  | 3.18        | 3.17  | 3.00        | 3.03      | 3.06       | 3.09       | 3.12       | 3.14       | 3.17       | 3.19       | 3.22       | 3.25       | 3.29       | 3.33       | 3.37         |
| 100                                 | 3.79        | 3.78  | 3.39        | 3.44      | 3.50       | 3.58       | 3.65       | 3.70       | 3.76       | 3.81       | 3.88       | 3.96       | 4.07       | 4.17       | 4.26         |
| 1000                                | 4.30        | 4.29  | 3.64        | 3.72      | 3.82       | 3.96       | 4.06       | 4.15       | 4.25       | 4.35       | 4.46       | 4.60       | 4.81       | 5.00       | 5.17         |
| 10000                               | 4.76        | 4.75  | 3.82        | 3.93      | 4.06       | 4.25       | 4.40       | 4.53       | 4.67       | 4.82       | 4.99       | 5.20       | 5.53       | 5.84       | 6.13         |
| 100000                              | 5.16        | 5.18  | 3.94        | 4.08      | 4.25       | 4.49       | 4.68       | 4.86       | 5.05       | 5.25       | 5.48       | 5.79       | 6.27       | 6.71       | 7.15         |
| <b>r = 300</b>                      | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                  | 3.22        | 3.21  | 3.03        | 3.05      | 3.08       | 3.12       | 3.15       | 3.18       | 3.21       | 3.23       | 3.26       | 3.29       | 3.34       | 3.38       | 3.42         |
| 100                                 | 3.87        | 3.85  | 3.44        | 3.50      | 3.56       | 3.65       | 3.72       | 3.78       | 3.84       | 3.89       | 3.96       | 4.04       | 4.16       | 4.27       | 4.36         |
| 1000                                | 4.40        | 4.39  | 3.71        | 3.80      | 3.90       | 4.04       | 4.15       | 4.25       | 4.35       | 4.45       | 4.56       | 4.71       | 4.92       | 5.11       | 5.29         |
| 10000                               | 4.87        | 4.86  | 3.90        | 4.01      | 4.16       | 4.35       | 4.50       | 4.64       | 4.78       | 4.93       | 5.10       | 5.32       | 5.66       | 5.96       | 6.25         |
| 100000                              | 5.28        | 5.29  | 4.03        | 4.17      | 4.35       | 4.59       | 4.79       | 4.98       | 5.16       | 5.37       | 5.61       | 5.91       | 6.39       | 6.83       | 7.26         |
| <b>r = 330</b>                      | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                  | 2.98        | 2.97  | 2.75        | 2.78      | 2.82       | 2.87       | 2.91       | 2.94       | 2.97       | 3.00       | 3.03       | 3.07       | 3.13       | 3.18       | 3.22         |
| 100                                 | 3.73        | 3.71  | 3.24        | 3.31      | 3.39       | 3.48       | 3.56       | 3.63       | 3.69       | 3.76       | 3.83       | 3.92       | 4.06       | 4.17       | 4.27         |
| 1000                                | 4.32        | 4.30  | 3.55        | 3.65      | 3.77       | 3.92       | 4.04       | 4.15       | 4.26       | 4.37       | 4.49       | 4.65       | 4.88       | 5.08       | 5.27         |
| 10000                               | 4.82        | 4.80  | 3.76        | 3.89      | 4.05       | 4.26       | 4.42       | 4.58       | 4.73       | 4.89       | 5.07       | 5.30       | 5.65       | 5.97       | 6.27         |
| 100000                              | 5.26        | 5.26  | 3.91        | 4.06      | 4.26       | 4.52       | 4.74       | 4.93       | 5.13       | 5.35       | 5.60       | 5.92       | 6.41       | 6.87       | 7.32         |
| <b>r = 360</b>                      | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                  | 2.01        | 2.00  | 1.79        | 1.82      | 1.86       | 1.90       | 1.94       | 1.97       | 1.99       | 2.02       | 2.05       | 2.09       | 2.14       | 2.19       | 2.23         |
| 100                                 | 2.73        | 2.71  | 2.25        | 2.32      | 2.39       | 2.49       | 2.56       | 2.63       | 2.69       | 2.76       | 2.83       | 2.93       | 3.06       | 3.18       | 3.29         |
| 1000                                | 3.34        | 3.32  | 2.56        | 2.65      | 2.77       | 2.93       | 3.05       | 3.16       | 3.27       | 3.39       | 3.52       | 3.68       | 3.93       | 4.16       | 4.37         |
| 10000                               | 3.87        | 3.87  | 2.76        | 2.89      | 3.05       | 3.27       | 3.45       | 3.61       | 3.77       | 3.95       | 4.15       | 4.41       | 4.81       | 5.18       | 5.53         |
| 100000                              | 4.36        | 4.38  | 2.91        | 3.07      | 3.27       | 3.55       | 3.78       | 4.00       | 4.22       | 4.46       | 4.75       | 5.12       | 5.70       | 6.26       | 6.82         |

Eindtabel Harlingen

| $\mu = -0.0075969$ $\sigma = 0.0536$ |             |                | Grenzen betrouwbaarheidsintervallen bij gegeven percentages |           |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |              |  |
|--------------------------------------|-------------|----------------|---|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|--------------|--|
| r = omni                             | Wbl.        | Gem. TR        | 2.5%  | 5%        | 10%        | 20%        | 30%        | 40%        | 50%        | 60%        | 70%        | 80%        | 90%        | 95%        | 97.5%        |  |
| 10                                   | 3.48        | 3.47           | 3.33  | 3.35      | 3.37       | 3.41       | 3.43       | 3.45       | 3.47       | 3.49       | 3.51       | 3.54       | 3.58       | 3.61       | 3.64         |  |
| 100                                  | 4.10        | 4.09           | 3.73  | 3.78      | 3.84       | 3.91       | 3.97       | 4.02       | 4.07       | 4.12       | 4.18       | 4.25       | 4.36       | 4.45       | 4.53         |  |
| 1000                                 | 4.65        | 4.64           | 4.02  | 4.09      | 4.19       | 4.32       | 4.42       | 4.51       | 4.60       | 4.69       | 4.80       | 4.93       | 5.13       | 5.31       | 5.48         |  |
| 10000                                | 5.15        | 5.15           | 4.23  | 4.34      | 4.47       | 4.65       | 4.80       | 4.94       | 5.07       | 5.22       | 5.38       | 5.59       | 5.92       | 6.22       | 6.50         |  |
| 100000                               | 5.61        | 5.63           | 4.38  | 4.52      | 4.70       | 4.94       | 5.13       | 5.32       | 5.50       | 5.71       | 5.94       | 6.25       | 6.73       | 7.18       | 7.62         |  |
| <b>r = 210</b>                       | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b> | <b>2.5%</b>   | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                   | 1.87        | 1.87           | 1.83  | 1.83      | 1.84       | 1.85       | 1.86       | 1.86       | 1.87       | 1.87       | 1.88       | 1.89       | 1.90       | 1.91       | 1.92         |  |
| 100                                  | 2.07        | 2.06           | 1.95  | 1.96      | 1.98       | 2.00       | 2.02       | 2.04       | 2.06       | 2.07       | 2.09       | 2.12       | 2.15       | 2.18       | 2.21         |  |
| 1000                                 | 2.26        | 2.25           | 2.04  | 2.06      | 2.10       | 2.14       | 2.17       | 2.21       | 2.24       | 2.27       | 2.31       | 2.36       | 2.44       | 2.51       | 2.57         |  |
| 10000                                | 2.44        | 2.45           | 2.11  | 2.15      | 2.19       | 2.26       | 2.31       | 2.36       | 2.41       | 2.47       | 2.53       | 2.62       | 2.76       | 2.89       | 3.01         |  |
| 100000                               | 2.63        | 2.65           | 2.16  | 2.21      | 2.27       | 2.36       | 2.44       | 2.51       | 2.58       | 2.67       | 2.77       | 2.90       | 3.12       | 3.33       | 3.55         |  |
| <b>r = 240</b>                       | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b> | <b>2.5%</b>   | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                   | 2.40        | 2.40           | 2.28  | 2.30      | 2.32       | 2.34       | 2.36       | 2.38       | 2.39       | 2.41       | 2.43       | 2.45       | 2.48       | 2.51       | 2.53         |  |
| 100                                  | 2.92        | 2.91           | 2.61  | 2.65      | 2.70       | 2.76       | 2.81       | 2.85       | 2.89       | 2.94       | 2.99       | 3.05       | 3.14       | 3.22       | 3.29         |  |
| 1000                                 | 3.39        | 3.38           | 2.85  | 2.91      | 2.99       | 3.10       | 3.19       | 3.27       | 3.35       | 3.43       | 3.52       | 3.64       | 3.82       | 3.98       | 4.14         |  |
| 10000                                | 3.84        | 3.84           | 3.03  | 3.12      | 3.24       | 3.40       | 3.52       | 3.65       | 3.77       | 3.90       | 4.05       | 4.24       | 4.55       | 4.83       | 5.10         |  |
| 100000                               | 4.26        | 4.29           | 3.16  | 3.28      | 3.43       | 3.65       | 3.82       | 3.99       | 4.16       | 4.35       | 4.57       | 4.86       | 5.32       | 5.77       | 6.21         |  |
| <b>r = 270</b>                       | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b> | <b>2.5%</b>   | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                   | 3.14        | 3.13           | 2.97  | 3.00      | 3.02       | 3.06       | 3.08       | 3.10       | 3.12       | 3.14       | 3.17       | 3.20       | 3.24       | 3.27       | 3.30         |  |
| 100                                  | 3.78        | 3.77           | 3.40  | 3.45      | 3.51       | 3.59       | 3.65       | 3.70       | 3.75       | 3.81       | 3.87       | 3.94       | 4.05       | 4.14       | 4.23         |  |
| 1000                                 | 4.35        | 4.34           | 3.70  | 3.78      | 3.88       | 4.01       | 4.11       | 4.21       | 4.30       | 4.39       | 4.50       | 4.64       | 4.84       | 5.02       | 5.19         |  |
| 10000                                | 4.86        | 4.86           | 3.92  | 4.03      | 4.17       | 4.36       | 4.51       | 4.64       | 4.78       | 4.93       | 5.10       | 5.31       | 5.64       | 5.94       | 6.22         |  |
| 100000                               | 5.33        | 5.35           | 4.08  | 4.22      | 4.40       | 4.64       | 4.84       | 5.03       | 5.22       | 5.43       | 5.66       | 5.97       | 6.45       | 6.90       | 7.34         |  |
| <b>r = 300</b>                       | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b> | <b>2.5%</b>   | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                   | 3.23        | 3.23           | 3.07  | 3.09      | 3.12       | 3.15       | 3.18       | 3.20       | 3.22       | 3.24       | 3.27       | 3.30       | 3.34       | 3.38       | 3.41         |  |
| 100                                  | 3.90        | 3.88           | 3.51  | 3.56      | 3.62       | 3.70       | 3.76       | 3.82       | 3.87       | 3.92       | 3.98       | 4.06       | 4.17       | 4.27       | 4.35         |  |
| 1000                                 | 4.47        | 4.46           | 3.81  | 3.90      | 4.00       | 4.13       | 4.23       | 4.33       | 4.42       | 4.52       | 4.63       | 4.76       | 4.97       | 5.15       | 5.32         |  |
| 10000                                | 4.99        | 4.98           | 4.04  | 4.15      | 4.29       | 4.48       | 4.63       | 4.77       | 4.91       | 5.06       | 5.22       | 5.44       | 5.76       | 6.06       | 6.34         |  |
| 100000                               | 5.46        | 5.47           | 4.20  | 4.34      | 4.52       | 4.77       | 4.97       | 5.16       | 5.35       | 5.55       | 5.79       | 6.09       | 6.57       | 7.02       | 7.44         |  |
| <b>r = 330</b>                       | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b> | <b>2.5%</b>   | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                   | 3.01        | 3.00           | 2.83  | 2.85      | 2.88       | 2.92       | 2.95       | 2.97       | 3.00       | 3.02       | 3.05       | 3.08       | 3.12       | 3.16       | 3.19         |  |
| 100                                  | 3.72        | 3.70           | 3.30  | 3.35      | 3.42       | 3.51       | 3.57       | 3.63       | 3.68       | 3.74       | 3.81       | 3.89       | 4.00       | 4.10       | 4.20         |  |
| 1000                                 | 4.32        | 4.31           | 3.63  | 3.71      | 3.82       | 3.96       | 4.07       | 4.17       | 4.27       | 4.37       | 4.49       | 4.63       | 4.84       | 5.04       | 5.21         |  |
| 10000                                | 4.86        | 4.85           | 3.86  | 3.98      | 4.13       | 4.33       | 4.49       | 4.63       | 4.78       | 4.93       | 5.11       | 5.33       | 5.68       | 5.99       | 6.28         |  |
| 100000                               | 5.36        | 5.37           | 4.03  | 4.18      | 4.37       | 4.63       | 4.84       | 5.04       | 5.24       | 5.45       | 5.70       | 6.02       | 6.52       | 6.98       | 7.43         |  |
| <b>r = 360</b>                       | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b> | <b>2.5%</b>   | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |  |
| 10                                   | 2.14        | 2.13           | 2.01  | 2.03      | 2.05       | 2.08       | 2.10       | 2.11       | 2.13       | 2.15       | 2.16       | 2.18       | 2.22       | 2.24       | 2.27         |  |
| 100                                  | 2.66        | 2.65           | 2.34  | 2.38      | 2.43       | 2.50       | 2.54       | 2.59       | 2.63       | 2.68       | 2.73       | 2.79       | 2.88       | 2.96       | 3.03         |  |
| 1000                                 | 3.14        | 3.13           | 2.59  | 2.65      | 2.73       | 2.85       | 2.93       | 3.01       | 3.09       | 3.18       | 3.27       | 3.39       | 3.58       | 3.74       | 3.90         |  |
| 10000                                | 3.59        | 3.60           | 2.77  | 2.86      | 2.98       | 3.14       | 3.27       | 3.40       | 3.52       | 3.65       | 3.81       | 4.01       | 4.32       | 4.61       | 4.89         |  |
| 100000                               | 4.03        | 4.06           | 2.90  | 3.02      | 3.18       | 3.40       | 3.58       | 3.75       | 3.92       | 4.12       | 4.34       | 4.64       | 5.12       | 5.58       | 6.04         |  |

Eindtabel Lauwersoog

| $\mu = -0.009098$ $\sigma = 0.0615$ |             | Grenzen betrouwbaarheidsintervallen bij gegeven percentages |             |           |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |              |
|-------------------------------------|-------------|---|-------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|--------------|
| r = omni                            | Wbl.        | Gem. TR   | 2.5%        | 5%        | 10%        | 20%        | 30%        | 40%        | 50%        | 60%        | 70%        | 80%        | 90%        | 95%        | 97.5%        |
| 10                                  | 4.08        | 4.07  | 3.89        | 3.92      | 3.95       | 3.99       | 4.02       | 4.04       | 4.07       | 4.09       | 4.12       | 4.16       | 4.21       | 4.25       | 4.28         |
| 100                                 | 4.86        | 4.84  | 4.40        | 4.46      | 4.53       | 4.63       | 4.70       | 4.76       | 4.82       | 4.89       | 4.96       | 5.05       | 5.18       | 5.29       | 5.40         |
| 1000                                | 5.54        | 5.52  | 4.76        | 4.86      | 4.98       | 5.13       | 5.26       | 5.37       | 5.48       | 5.59       | 5.72       | 5.88       | 6.13       | 6.35       | 6.55         |
| 10000                               | 6.15        | 6.14  | 5.02        | 5.15      | 5.32       | 5.55       | 5.73       | 5.89       | 6.05       | 6.23       | 6.43       | 6.69       | 7.08       | 7.43       | 7.77         |
| 100000                              | 6.71        | 6.73  | 5.22        | 5.38      | 5.60       | 5.89       | 6.13       | 6.35       | 6.58       | 6.82       | 7.11       | 7.47       | 8.04       | 8.58       | 9.10         |
| <b>r = 210</b>                      | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                  | 2.15        | 2.15  | 2.09        | 2.09      | 2.11       | 2.12       | 2.13       | 2.14       | 2.15       | 2.16       | 2.17       | 2.18       | 2.20       | 2.21       | 2.23         |
| 100                                 | 2.45        | 2.45  | 2.27        | 2.29      | 2.32       | 2.36       | 2.39       | 2.41       | 2.44       | 2.46       | 2.49       | 2.53       | 2.58       | 2.63       | 2.67         |
| 1000                                | 2.73        | 2.73  | 2.41        | 2.45      | 2.50       | 2.56       | 2.61       | 2.66       | 2.70       | 2.75       | 2.81       | 2.88       | 2.98       | 3.08       | 3.17         |
| 10000                               | 2.99        | 3.00  | 2.51        | 2.57      | 2.64       | 2.73       | 2.81       | 2.88       | 2.95       | 3.03       | 3.12       | 3.24       | 3.42       | 3.59       | 3.75         |
| 100000                              | 3.25        | 3.27  | 2.59        | 2.66      | 2.75       | 2.88       | 2.98       | 3.08       | 3.19       | 3.30       | 3.43       | 3.61       | 3.88       | 4.15       | 4.42         |
| <b>r = 240</b>                      | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                  | 2.67        | 2.66  | 2.53        | 2.55      | 2.57       | 2.60       | 2.62       | 2.64       | 2.66       | 2.67       | 2.69       | 2.72       | 2.75       | 2.78       | 2.81         |
| 100                                 | 3.24        | 3.22  | 2.89        | 2.94      | 2.99       | 3.06       | 3.11       | 3.16       | 3.21       | 3.26       | 3.31       | 3.38       | 3.48       | 3.57       | 3.65         |
| 1000                                | 3.76        | 3.75  | 3.16        | 3.23      | 3.32       | 3.44       | 3.54       | 3.62       | 3.71       | 3.80       | 3.91       | 4.04       | 4.23       | 4.41       | 4.58         |
| 10000                               | 4.25        | 4.26  | 3.36        | 3.46      | 3.59       | 3.77       | 3.91       | 4.04       | 4.17       | 4.32       | 4.48       | 4.70       | 5.03       | 5.34       | 5.64         |
| 100000                              | 4.72        | 4.75  | 3.51        | 3.64      | 3.81       | 4.04       | 4.23       | 4.42       | 4.61       | 4.81       | 5.06       | 5.37       | 5.88       | 6.36       | 6.84         |
| <b>r = 270</b>                      | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                  | 3.54        | 3.53  | 3.35        | 3.37      | 3.41       | 3.45       | 3.48       | 3.50       | 3.53       | 3.56       | 3.58       | 3.62       | 3.67       | 3.71       | 3.75         |
| 100                                 | 4.33        | 4.31  | 3.86        | 3.92      | 4.00       | 4.09       | 4.16       | 4.23       | 4.29       | 4.36       | 4.43       | 4.52       | 4.65       | 4.76       | 4.86         |
| 1000                                | 5.00        | 4.99  | 4.23        | 4.32      | 4.44       | 4.60       | 4.72       | 4.83       | 4.94       | 5.06       | 5.19       | 5.35       | 5.59       | 5.80       | 6.00         |
| 10000                               | 5.61        | 5.60  | 4.49        | 4.62      | 4.79       | 5.01       | 5.19       | 5.35       | 5.51       | 5.69       | 5.89       | 6.14       | 6.52       | 6.88       | 7.21         |
| 100000                              | 6.17        | 6.18  | 4.68        | 4.85      | 5.06       | 5.35       | 5.59       | 5.81       | 6.03       | 6.27       | 6.55       | 6.91       | 7.48       | 8.00       | 8.51         |
| <b>r = 300</b>                      | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                  | 3.87        | 3.86  | 3.64        | 3.67      | 3.71       | 3.76       | 3.79       | 3.82       | 3.85       | 3.88       | 3.91       | 3.95       | 4.01       | 4.05       | 4.10         |
| 100                                 | 4.73        | 4.71  | 4.23        | 4.29      | 4.37       | 4.48       | 4.56       | 4.62       | 4.69       | 4.76       | 4.84       | 4.93       | 5.07       | 5.19       | 5.30         |
| 1000                                | 5.45        | 5.42  | 4.62        | 4.73      | 4.85       | 5.02       | 5.15       | 5.27       | 5.38       | 5.50       | 5.64       | 5.80       | 6.05       | 6.27       | 6.47         |
| 10000                               | 6.07        | 6.06  | 4.90        | 5.04      | 5.22       | 5.45       | 5.64       | 5.81       | 5.98       | 6.15       | 6.36       | 6.61       | 6.99       | 7.34       | 7.67         |
| 100000                              | 6.63        | 6.63  | 5.11        | 5.28      | 5.51       | 5.81       | 6.05       | 6.28       | 6.50       | 6.74       | 7.02       | 7.38       | 7.93       | 8.44       | 8.92         |
| <b>r = 330</b>                      | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                  | 3.36        | 3.35  | 3.14        | 3.17      | 3.20       | 3.25       | 3.29       | 3.32       | 3.34       | 3.37       | 3.41       | 3.44       | 3.50       | 3.55       | 3.59         |
| 100                                 | 4.23        | 4.21  | 3.72        | 3.79      | 3.87       | 3.97       | 4.05       | 4.12       | 4.19       | 4.26       | 4.34       | 4.43       | 4.57       | 4.70       | 4.81         |
| 1000                                | 4.96        | 4.94  | 4.12        | 4.22      | 4.35       | 4.52       | 4.66       | 4.77       | 4.89       | 5.01       | 5.15       | 5.32       | 5.58       | 5.81       | 6.02         |
| 10000                               | 5.61        | 5.59  | 4.40        | 4.55      | 4.73       | 4.97       | 5.16       | 5.33       | 5.50       | 5.69       | 5.90       | 6.17       | 6.57       | 6.94       | 7.29         |
| 100000                              | 6.19        | 6.20  | 4.61        | 4.79      | 5.02       | 5.33       | 5.58       | 5.82       | 6.05       | 6.31       | 6.60       | 6.98       | 7.56       | 8.11       | 8.64         |
| <b>r = 360</b>                      | <b>Wbl.</b> | <b>Gem. TR</b>  | <b>2.5%</b> | <b>5%</b> | <b>10%</b> | <b>20%</b> | <b>30%</b> | <b>40%</b> | <b>50%</b> | <b>60%</b> | <b>70%</b> | <b>80%</b> | <b>90%</b> | <b>95%</b> | <b>97.5%</b> |
| 10                                  | 2.51        | 2.50  | 2.35        | 2.37      | 2.40       | 2.43       | 2.46       | 2.48       | 2.50       | 2.52       | 2.54       | 2.57       | 2.61       | 2.65       | 2.68         |
| 100                                 | 3.16        | 3.15  | 2.77        | 2.83      | 2.89       | 2.97       | 3.03       | 3.08       | 3.13       | 3.19       | 3.25       | 3.32       | 3.43       | 3.53       | 3.62         |
| 1000                                | 3.75        | 3.73  | 3.08        | 3.16      | 3.26       | 3.40       | 3.50       | 3.60       | 3.69       | 3.79       | 3.90       | 4.04       | 4.26       | 4.45       | 4.63         |
| 10000                               | 4.28        | 4.28  | 3.30        | 3.41      | 3.56       | 3.75       | 3.91       | 4.05       | 4.19       | 4.35       | 4.53       | 4.75       | 5.10       | 5.42       | 5.73         |
| 100000                              | 4.78        | 4.80  | 3.47        | 3.61      | 3.79       | 4.05       | 4.26       | 4.45       | 4.66       | 4.87       | 5.13       | 5.46       | 5.98       | 6.48       | 6.96         |

Eindtabel Delfzijl